

Экзамен

Поле k в задачах предполагается произвольным, а модули — правыми.

Задача 1. Пусть A — алгебра путей в колчане

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{x} 2 \xrightarrow{y} 3 \xrightarrow{z} 4 \\ \xleftarrow{w} \end{array}$$

с соотношениями $xw = wz = 0$. Найдите глобальную размерность A .

Задача 2. Пусть A — алгебра путей в колчане

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{x} 2 \xrightarrow{y} 3 \xrightarrow{z} 4 \\ \xleftarrow{w} \end{array}$$

с соотношениями $zux = wzy = xwz = yxw = 0$. Докажите, что на категории $\text{Perf}(A)$ существует функтор Серра.

Задача 3. Докажите, что алгебра путей в колчане Γ :

$$1 \xrightarrow{x} 2 \xrightarrow{y} 3$$

с соотношением $yx = 0$ производно Морита-эквивалентна алгебра путей в колчане Γ без соотношений.

Задача 4. Пусть A — наследственная алгебра, M — конечно порождённый A -модуль, для которого $\text{Ext}^i(M, M) = 0$ при $i > 0$, положим $B = \text{End}(M)$. Допустим, что $\text{gldim}(B) < \infty$. Докажите, что $\text{gldim}(B) \leq 2$.

Задача 5. Сколько существует представлений колчана

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \longleftarrow & 1 & \longrightarrow & 3 \\ & & \downarrow & & \\ & & 4 & & \end{array}$$

с вектором размерности $(2, 2, 2, 2)$ с точностью до изоморфизма?

Задача 6. Пусть Γ — колчан

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 3 \\ & \searrow & \nearrow \\ & 2 & \end{array}$$

Найдите собственные значения и жорданову нормальную форму оператора, которым функтор Φ^+ (изоморфный сдвигу функтора Серра на -1) действует на $K_0(\text{mod-}k\Gamma)$. Являются ли простые $k\Gamma$ -модули регулярными/проективными/инъективными?

Экзамен домашний. Решения задач рекомендуется записывать ясно, понятно и полностью (но без ненужных подробностей). В задачах, предполагающих ответ, этот ответ необходимо явно записать. Можно пользоваться сведениями, рассказанными на лекциях, прочие факты нужно объяснять. Крайний срок сдачи решений — 27.12.2020 включительно.