29.09.2020
Лекция 4

# Триангулированные категории

В прошлый раз мы определили для абелевой категории $\mathcal{A}$ её производную категорию $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ как локализацию гомотопической категории по квазиизоморфизмам. Сейчас мы изучим, как она устроена.

Простейшие комплексы – это комплексы с единственным ненулевым членом. Для каждого $i \in \mathbb{Z}$ имеется функтор $\mathcal{A} \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$, сопоставляющий объекту $M \in \mathcal{A}$ комплекс $M[i]$, с единственным членом $M$ в степени $-i$. Выясним, как устроены морфизмы в производной категории между объектами вида $M[i]$. Напомним обозначение : $\mathrm{Hom}^i(K, L) := \mathrm{Hom}(K, L[i])$.

Для этого, да и не только, нам понадобится понятие *канонического обрезания* комплекса. Пусть $K$ – комплекс. Определим комплекс $\tau_{\leqslant n}K$ следующим образом:

$$(\tau_{\leqslant n}K)^i = \begin{cases} K^i & \text{при } i < n; \\ Z^n(K) & \text{при } i = n; \\ 0 & \text{при } i > n, \end{cases}$$

дифференциалы такие же, как в $K$. Это подкомплекс в $K$.

Аналогично определим канонические правые обрезания $\tau_{\geqslant n}K$ комплекса $K$:

$$(\tau_{\geqslant n}K)^i = \begin{cases} 0 & \text{при } i < n; \\ K^n/B^n(K) & \text{при } i = n; \\ K^i & \text{при } i > n, \end{cases}$$

это факторкомплекс $K$. Более того, фактор $K/\tau_{\leqslant n}K$ квазиизоморфен $\tau_{\geqslant n+1}K$.

Несложно видеть, что $\tau_{\leqslant n}$, $\tau_{\geqslant n}$ действуют не только на объектах, но и на морфизмах, т.е. являются функторами. Имеются морфизмы функторов $\tau_{\leqslant n} \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}$ и $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})} \to \tau_{\geqslant n}$. Для каждого $K$ морфизм $\tau_{\leqslant n}K \to K$ индуцирует изоморфизм на $i$-х когомологиях при $i \leqslant n$, а при $i > n$ когомологии $\tau_{\leqslant n}K$ нулевые. Аналогично, для каждого $K$ морфизм $K \to \tau_{\geqslant n}K$ индуцирует изоморфизм на $i$-х когомологиях при $i \geqslant n$, а при $i < n$ когомологии $\tau_{\geqslant n}K$ нулевые.

Очевидно, что обрезания переводит морфизмы, гомотопные нулю, в морфизмы, гомотопные нулю, а квазиизоморфизмы — в квазиизоморфизмы. Поэтому обрезания продолжается до функторов на категориях $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

**Задача 1.** Проверьте, что функтор $\tau_{\leqslant n}$ сопряжён справа к вложению $\mathcal{C}_{\leqslant n}(\mathcal{A}) \to \mathcal{C}(\mathcal{A})$, а функтор $\tau_{\geqslant n}$ сопряжён слева к вложению $\mathcal{C}_{\geqslant n}(\mathcal{A}) \to \mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Проверьте, что аналогичное верно для гомотопических и производных категорий.

**Предложение 1.** *Пусть $M, N \in \mathcal{A}$.*

*1. При $j < 0$ имеем $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(M, N[j]) = 0$.*

*2. Имеем $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(M, N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$, в частности, естественный функтор $\mathcal{A} \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ строго полон.*

*Доказательство.* 1. Пусть морфизм задан домиком $M \leftarrow X \to N[j]$. Заменим его на эквивалентный домик $M \leftarrow \tau_{\leqslant 0}X \xrightarrow{f} N[j]$. При этом $(\tau_{\leqslant 0}X)^k = 0$ при $k > 0$, а $N[j]^k \neq 0$ только при $k = -j > 0$, значит $f = 0$.

2. Нужно проверить, что отображение

$$q\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(M, N)$$

— биекция для любых $M, N \in \mathcal{A}$. Есть также отображение вычисления когомологий $H^0\colon \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(M,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N)$, оно обратно к $q$ слева: $H^0 q = 1$. Покажем, что $qH^0 = 1$. Пусть морфизм $M \to N$ задан домиком $M \xleftarrow{s} X \xrightarrow{f} N$. Рассмотрим морфизм $H^0(fs^{-1})\colon M \to N$ и покажем, что домик $fs^{-1}$ эквивалентен домику $H^0(fs^{-1})1_M^{-1}$. Действительно, эквивалентность задаётся при помощи квазиизоморфизмов $\tau_{\leqslant 0}X \to X$ и $\tau_{\leqslant 0}X \to M$. $\square$

Более интересно устроены морфизмы из $M$ в $N[j]$ при $j > 0$. Они известны также как группы Ext.

**Определение 2.** Для объектов $M, N$ абелевой категории $\mathcal{A}$ и $i \in \mathbb{Z}$ определим

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M,N) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(M, N[i]).$$

**Определение 3.** Для объектов $M, N$ абелевой категории $\mathcal{A}$ и $i > 0$ определим Ext по Йонеде

$$\mathrm{Ext}^i_Y(M,N) := \{0 \to N \to K_{i-1} \to K_{i-2} \to \ldots \to K_1 \to K_0 \to M \to 0\}/\sim$$

как множество классов эквивалентности “длинных расширений”, т.е. точных последовательностей $0 \to N \to K_{i-1} \to \ldots \to K_0 \to M \to 0$ в $\mathcal{A}$ по отношению эквивалентности: две последовательности эквивалентны, если их можно связать несколькими элементарными эквивалентностями вида

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & K_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & K'_{i-1} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & K'_0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

**Предложение 4.** *Определения* Ext *через морфизмы в проивзодной категории и по Йонеде равносильны, т.е. имеется биекция*

$$\mathrm{Ext}^i_Y(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M,N).$$

*Идея доказательства.* Сопоставим всякому расширению

$$0 \to N \to K_{i-1} \to \ldots \to K_1 \to K_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

морфизм $M \to N[i]$ в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, заданный домиком $M \xleftarrow{d_0} [N \to K_{j-1} \to \ldots \to K_0] \to N[j]$. $\square$

**Задача 2.** Покажите, что это корректно задаёт отображение $\mathrm{Ext}^i_Y(M,N) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M,N)$ и что это отображение — биекция.

Описание Ext’ов через морфизмы в производной категории очень удобно. Из него автоматически видно, что $\mathrm{Ext}^i(M,N)$ — абелева группа, что Ext функториален по обоим аргументам, а также это описание позволяет ввести умножение на Ext’ах.

Действительно, определим отображение

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M,N) \times \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(N,K) \to \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{A}}(M,K).$$

Пусть $f \in \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M,N), g \in \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(N,K)$, определим их произведение как композицию

$$M \xrightarrow{f} N[i] \xrightarrow{g[j]} K[i+j].$$

Получится ассоциативная билинейная операция.

**Задача 3.** a) Покажите, что комплекс $K \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, для которого $H^i(K) = 0$ при $i \neq 0$, квазиизоморфен комплексу вида $M[0]$, где $M \in \mathcal{A}$.

b) Пусть $K$ и $L$ — комплексы, причём $H^i(K) = 0$ при $i \geqslant n$, а $H^i(L) = 0$ при $i < n$. Покажите, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(K, L) = 0$.

c) Пусть $K$ и $L$ — комплексы, причём $H^i(K) = 0$ при $i > n$, а $H^i(L) = 0$ при $i < n$. Покажите, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(K, L) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(H^n(K), H^n(L))$.

В то время, как категория комплексов $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ над абелевой категорией $\mathcal{A}$ абелева, категории $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ уже не будут абелевыми. В них вообще очень мало инъективных и сюръективных морфизмов. Напомним, что по определению морфизм $f\colon X \to Y$ в аддитивной категории инъективен, если для любого морфизма $u\colon U \to X$ из $fu = 0$ следует $u = 0$.

**Задача 4.** Покажите, что морфизм комплексов инъективен в категории $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ титтк у него есть левый обратный.

Зато и гомотопическая, и производная категории триангулированны. Как мы видели для гомотопической категории, в них есть выделенные треугольники, которые играют роль, аналогичную роли точных троек в абелевых категориях. Свойства этих треугольников составляют определение тринагулированной категории, к которому мы переходим.

Пусть на категории $\mathcal{T}$ задан автоморфизм $[1]\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ (более правильно говорить “автоэквивалентность”, но в случае категории комплексов это в действительности автоморфизм, что упрощает формулировки). *Треугольником* в $\mathcal{T}$ называется диаграмма вида $K \to L \to M \to K[1]$. Морфизмом треугольников называется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] \arrow[d, "f"] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & K[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
K' \arrow[r] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & K'[1].
\end{tikzcd}$$

*Триангулированной категорией* называется категория $\mathcal{T}$ с автоморфизмом $[1]$ (он называется *функтором сдвига*), в которой выделен класс треугольников, удовлетворяющий следующим аксиомам:

TR1. (a) Треугольник $X \xrightarrow{1_X} X \to 0 \to X[1]$ выделен;

(b) Треугольник, изоморфный выделенному, выделен;

(c) Любой морфизм $f\colon X \to Y$ можно дополнить до выделенного треугольника $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1]$.

TR2. Треугольник $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ выделен тогда и только тогда, когда выделен треугольник $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$.

TR3. Пусть строки диаграммы

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "w"] & X[1] \arrow[d, "u[1]"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1].
\end{tikzcd}$$

– выделенные треугольники, и заданы морфизмы $u$ и $v$ такие, что $vf = f'u$. Тогда существует морфизм $w$, делающий диаграмму коммутативной.

TR4. Любая диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[ur, "f"] & & Z \end{tikzcd}$$

дополняется до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[dr, "1"'] \arrow[ddrr, bend right] & & Y \arrow[ll] \arrow[dr, "g"] & & X' \arrow[ll, "1"'] \arrow[llll, bend right, "1"'] \\
& X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "gf"] & & Z \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
& & Y', \arrow[ul, "1"] \arrow[uurr, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

в которой стрелка с пометкой 1 из $A$ в $B$ обозначает морфизм из $A$ в $B[1]$, а треугольники с вершинами $(X, Y, Z'), (Y, Z, X'), (X, Z, Y')$ и $(Z', Y', X')$ – выделенные. Заметим, что коммутативность этой диаграммы включает в себя то, что два возможных морфизма из $Y$ в $Y'$ и из $Y'$ в $Y[1]$ равны.

Сделаем несколько замечаний относительно аксиом.

Объект $Z$ из аксиомы TR1c, дополняющий морфизм $f$ до выделенного треугольника, естественно назвать конусом $f$. Как мы ниже увидим, конус определён однозначно с точностью до изоморфизма. Аксиома TR3 утверждает, что морфизму в категории стрелок соответствует морфизм конусов этих стрелок. Однако, из аксиом не следует, что это соответствие является функтором — морфизм между конусами в аксиоме TR3 определён не однозначно. Это обстоятельство — один из недостатков аксиоматики триангулированных категорий.

Аксиома TR4 называется аксиомой октаэдра. Несмотря на кажущуюся громоздкость, её смысл можно выразить одной фразой:

*конус $gf$ есть конус морфизма между конусами $f$ и $g$.*

Диаграмма октаэдра из формулировки этой аксиомы строится автоматически, за исключением двух стрелок $Z' \to Y'$ и $Y' \to X'$, свойства которых и постулируются.

Некоторые свойства выделенных треугольников собраны в следующем предложении.

**Предложение 5.** *Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ — выделенный треугольник. Тогда*

1. *Композиции $gf, hg, f[1]h$ равны нулю.*

2. *По всякому треугольнику $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ можно построить бесконечную последовательность*

$$(1)\quad \ldots \to Z[-1] \xrightarrow{-h[-1]} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1] \xrightarrow{-g[1]} Z[1] \xrightarrow{-h[1]} X[2] \xrightarrow{f[2]} \ldots,$$

*в которой любой фрагмент длины 3 — выделенный треугольник. Тем самым, вершины треугольника равноправны.*

3. *Если $U$ — произвольный объект, то последовательности*

$$\ldots \to \mathrm{Hom}^{-1}(U,Z) \to \mathrm{Hom}(U,X) \to \mathrm{Hom}(U,Y) \to \mathrm{Hom}(U,Z) \to \mathrm{Hom}^{1}(U,X) \to \ldots$$

*и*

$$\ldots \leftarrow \mathrm{Hom}^{1}(Z,U) \leftarrow \mathrm{Hom}(X,U) \leftarrow \mathrm{Hom}(Y,U) \leftarrow \mathrm{Hom}(Z,U) \leftarrow \mathrm{Hom}^{-1}(X,U) \leftarrow \ldots,$$

*полученные применением функторов* $\mathrm{Hom}(U,-)$ *и* $\mathrm{Hom}(-,U)$ *к последовательности* (1)*, точны.*

4. *Если в аксиоме TR3 морфизмы $u$ и $v$ — изоморфизмы, то и $w$ — изоморфизм.*

5. *В аксиоме TR1c объект $Z$ определён однозначно с точностью до изоморфизма.*

*Доказательство.* 1. Согласно аксиоме TR2, достаточно проверить, что $gf = 0$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X[1] \arrow[d, "1_{X[1]}"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1].
\end{tikzcd}$$

По аксиоме TR3 существует морфизм $0 \to Z$ (нулевой), делающий её коммутативной. Это и значит, что $gf = 0$.

2. Следует из TR2.

3. Проверим точность первой последовательности, из пункта 1 следует, что она — комплекс. Докажем, что он точен, согласно TR2, достаточно рассмотреть средний член. Пусть $t\colon U \to Y$ и $gt = 0$. Снова рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "1_U"] \arrow[d, dashed, "t'"] & U \arrow[r] \arrow[d, "t"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & U[1] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & X[1].
\end{tikzcd}$$

В ней средний квадрат коммутативен по предположению, значит по TR3 найдётся $t'$, для которого коммутативен левый квадрат, т.е. $t = ft'$.

4. Покажем, что $w$ индуцирует изоморфизмы на $\mathrm{Hom}(U,-)$ при всех $U$. Применим $\mathrm{Hom}(U,-)$ к диаграмме из TR3, получим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(U,X) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & \mathrm{Hom}(U,Y) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & \mathrm{Hom}(U,Z) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & \mathrm{Hom}(U,X[1]) \arrow[r, "f[1]"] \arrow[d, "u[1]"] & \mathrm{Hom}(U,Y[1]) \arrow[d, "v[1]"] \\
\mathrm{Hom}(U,X') \arrow[r, "f'"] & \mathrm{Hom}(U,Y') \arrow[r, "g'"] & \mathrm{Hom}(U,Z') \arrow[r, "h'"] & \mathrm{Hom}(U,X'[1]) \arrow[r, "f[1]"] & \mathrm{Hom}(U,Y'[1]),
\end{tikzcd}$$

в которой строки — точные последовательности по пункту 3, а все вертикальные стрелки, кроме средней, — изоморфизмы. Диаграммный поиск показывает, что и средняя стрелка будет изоморфизмом (этот факт носит название 5-леммы). Отсюда по лемме Йонеды следует, что и сам морфизм $w$ — изоморфизм.

5. Следует из аксиомы TR3 и пункта 4.

□

**Задача 5.** Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ — выделенный треугольник в $\mathsf{k}$-линейной триангулированной категории, и $\lambda, \mu, \nu \in \mathsf{k}^*$. Тогда треугольник $X \xrightarrow{\lambda f} Y \xrightarrow{\mu g} Z \xrightarrow{\nu h} X[1]$ выделен, если $\lambda\mu\nu = 1$.

**Задача 6.** Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ — выделенный треугольник. Тогда $h = 0$ титтк $f$ имеет левый обратный титтк $g$ имеет правый обратный.

Теперь перейдём к основному факту сегодняшней лекции — покажем, что гомотопическая категория комплексов триангулированна. Как и раньше, мы называем треугольник в $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ выделенным, если он изоморфен стандартному треугольнику, т.е. имеющему вид $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{a} C(f) \xrightarrow{b} X[1]$, где $f$ — произвольный морфизм комплексов, а $a$ и $b$ — вложение прямого слагаемого и проекция на прямое слагаемое соответственно.

**Предложение 6.** *Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория, а $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ — гомотопическая категории комплексов над $\mathcal{A}$. Тогда категория $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ с определённым выше классом выделенных треугольников и обычным функтором сдвига комплексов триангулированна.*

*Доказательство.* Аксиома TR1c выполнена по определению выделенных треугольников, TR1b очевидна. TR1a следует из того, что треугольник $0 \to X \xrightarrow{1_X} X \to 0$ стандартный, и аксиомы TR2.

Докажем TR2. Для этого понадобится понятие цилиндра морфизма. Пусть $f\colon X \to Y$ – морфизм комплексов. Рассмотрим стандартный треугольник $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{a} C(f) \xrightarrow{b} X[1]$, а также треугольник $C(f)[-1] \xrightarrow{-b[-1]} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{a} C(f)$. Определим *цилиндр* $f$ как конус морфизма $-b[-1]\colon C(f)[-1] \to X$:

$$Cyl(f) := C(-b[-1]).$$

**Лемма 7.** *Треугольник $C(f)[-1] \xrightarrow{-b[-1]} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{a} C(f)$ изоморфен в гомотопической категории стандартному треугольнику $C(f)[-1] \xrightarrow{-b[-1]} X \to Cyl(f) \to C(f)$.*

**Задача 7.** Докажите эту лемму: напишите явно формулу для членов и дифференциала в цилиндре, определите морфизмы $Y \to Cyl(f)$, $Cyl(f) \to Y$ и проверьте, что они дают изоморфизм указанных треугольников в $\mathcal{H}(\mathcal{A})$.

Теперь проверим аксиому TR2 в $\mathcal{H}(\mathcal{A})$. Пусть треугольник $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ выделен, тогда он изоморфен треугольнику $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{a} C(f) \xrightarrow{b} X[1]$, а

$$Z[-1] \xrightarrow{-h[-1]} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \tag{2}$$

изоморфен

$$C(f)[-1] \xrightarrow{-b[-1]} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{a} C(f). \tag{3}$$

По лемме 7, треугольник (3) выделен, значит и (2) выделен.

Мы показали, что "сдвиг влево" выделенного треугольника выделен. Чтобы проверить про сдвиг вправо, сделаем два раза сдвиг влево. Останется проверить утверждение: треугольник $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ выделен титтк треугольник $X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1] \xrightarrow{-g[1]} Z[1] \xrightarrow{-h[1]}$

$X[2]$ выделен, которое следует из того, что $C(f)[1] \cong C(-f[1])$ для любого морфизма комплексов $f$, и задачи 5.

Проверим аксиому TR3. Это достаточно сделать для стандартных выделенных треугольников. Т.е., необходимо по коммутативной в $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ диаграмме

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & L \arrow[d, "v"] \\ K' \arrow[r, "f'"] & L' \end{tikzcd}$$

построить коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & C(f) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & K[1] \arrow[d, "u[1]"] \\ K' \arrow[r, "f'"] & L' \arrow[r, "g'"] & C(f') \arrow[r, "h'"] & K[1]. \end{tikzcd}$$

Это нетрудно сделать: морфизмы $vf$ и $f'u$ гомотопны, пусть $vf = f'u + dh + hd$, где $h^i \colon K^i \to (L')^{i-1}$ — набор морфизмов.

**Задача 8.** Постройте морфизм комплексов $w\colon C(f) \to C(f')$, проверьте, что два правые квадрата коммутируют.

**Задача 9.** Проверьте аксиому TR4 в $\mathcal{H}(\mathcal{A})$.

На этом доказательство того, что гомотопическая категория триангулированна, закончено. $\square$

Теперь введём триангулированную структуру на производной категории $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ от абелевой. В качестве функтора сдвига возьмём обычный сдвиг комплексов, выделенным треугольником назовём треугольник, изоморфный (в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$) стандартному треугольнику $K \to L \to C(f) \to K[1]$.

Проверять, что эти данные удовлетворяют аксиомам триангулированной категории, удобно в общем контексте локализации триангулированных категорий.

Пусть $\mathcal{T}$ — триангулированная категория, $S$ — класс морфизмов в $\mathcal{T}$, удовлетворяющий (правым) условиям Оре. Предположим, что $S$ также удовлетворяет условиям

* $S[1] = S$,

** если в TR3 морфизмы $u$ и $v$ лежат в $S$, то $w$ можно выбрать также лежащим в $S$.

Обозначим через $q\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}[S^{-1}]$ локализацию. Введём сдвиг на локализованной категории $\mathcal{T}[S^{-1}]$: функтор $q \circ [1]_{\mathcal{T}}$ переводит $S$ в изоморфизмы (в силу условия *) и по определению локализации пропускается через однозначно определённый функтор сдвига $[1]_{\mathcal{T}[S^{-1}]}\colon \mathcal{T}[S^{-1}] \to \mathcal{T}[S^{-1}]$. Более явно: сдвиг в $\mathcal{T}[S^{-1}]$ такой же, как и в $\mathcal{T}$ на объектах, $fs^{-1})[1] = f[1](s[1])^{-1}$ на морфизмах. Определим выделенные треугольники в $\mathcal{T}[S^{-1}]$ как треугольники, изоморфные треугольнику вида $q(X \to Y \to Z \to X[1])$, где $X \to Y \to Z \to X[1]$ — выделенный треугольник в $\mathcal{T}$.

**Предложение 8.** *Категория $\mathcal{T}[S^{-1}]$ с введёнными выше функтором сдвига и выделенными треугольниками триангулированна.*

*Доказательство.* Проверять нужно три аксиомы: TR1c, TR3 и TR4.

**

Проверим TR1c. Пусть морфизм $X \to Y$ задан домиком $X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{f} Y$. Дополним $f$ в $\mathcal{T}$ до выделенного треугольника $X' \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X'[1]$. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & X'[1] \arrow[d, "s[1]"] \\ X \arrow[r, "fs^{-1}"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "s[1]h"] & X[1] \end{tikzcd}$$

показывает, что треугольник $X \xrightarrow{fs^{-1}} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{s[1]h} X[1]$ также выделен.

Проверим TR3. Можно считать, что выделенные треугольники, фигурирующие в формулировке — стандартные, а морфизмы $X \to X'$ и $Y \to Y'$ заданы домиками $X \xleftarrow{s} X'' \xrightarrow{u} X'$ и $Y \xleftarrow{t} Y'' \xrightarrow{v} Y'$. Далее, заменяя домик $X \xleftarrow{s} X'' \xrightarrow{u} X'$ на эквивалентный, можно считать, что существует морфизм $f''\colon X'' \to Y''$ такой, что $vf'' = f'u$ и $tf'' = fs$. Дополним $f''$ до выделенного треугольника $X'' \xrightarrow{f''} Y'' \xrightarrow{g''} Z'' \xrightarrow{h''} X''[1]$. По аксиоме TR3 существуют морфизмы выделенных треугольников, замыкающие диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1] \\
X'' \arrow[u, "s"] \arrow[r, "f''"] \arrow[d, "u"] & Y'' \arrow[u, "t"] \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "v"] & Z'' \arrow[u, dashed, "r"] \arrow[r, "h''"] \arrow[d, dashed, "w"] & X''[1] \arrow[u, "{s[1]}"] \arrow[d, "{u[1]}"] \\
X' \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[r, "g'"] & Z' \arrow[r, "h'"] & X'[1].
\end{tikzcd}$$

Причём $r$ можно выбрать лежащим в $S$ по условию **. Отсюда видно, что морфизм $wr^{-1}\colon Z \to Z'$ будет искомым.

Проверим TR4. Пусть дана пара морфизмов $fs^{-1}\colon X \to Y$ и $gt^{-1}\colon Y \to Z$. Построим изоморфную ей пару морфизмов $f'$ и $g$, пришедших из $\mathcal{T}$: рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X'' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "t'"] & Y' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"] & Z \arrow[dd, equal] \\
X' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] & Y \arrow[d, equal] & \\
X \arrow[r, "fs^{-1}"] & Y \arrow[r, "gt^{-1}"] & Z
\end{tikzcd}$$

Для пары $f'$ и $g$ требуемая диаграмма октаэдра существует по аксиоме TR4 для $\mathcal{T}$. Значит, она существует и для исходной пары. □

Отсюда получаем

**Предложение 9.** *Для абелевой категории $\mathcal{A}$ категория $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ триангулированна.*

*Доказательство.* Следует из предыдущего предложения. Действительно, класс квазиизоморфизмов в гомотопической категории удовлетворяет условиям * и **. Для условия * это очевидно, условие ** проверяется с помощью длинной точной последовательности в когомологиях и 5-леммы. □

Сформулируем отдельно утверждение, которым будет часто пользоваться.

**Следствие 10.** *Пусть $X \to Y \to Z \to X[1]$ — выделенный треугольник в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Тогда для любого комплегса $U$ имеются длинные точные последовательности морфизмов в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$*

$$\ldots \to \mathrm{Hom}^{-1}(U, Z) \to \mathrm{Hom}(U, X) \to \mathrm{Hom}(U, Y) \to \mathrm{Hom}(U, Z) \to \mathrm{Hom}^1(U, X) \to \ldots$$

*и*

$$\ldots \leftarrow \mathrm{Hom}^1(Z, U) \leftarrow \mathrm{Hom}(X, U) \leftarrow \mathrm{Hom}(Y, U) \leftarrow \mathrm{Hom}(Z, U) \leftarrow \mathrm{Hom}^{-1}(X, U) \leftarrow \ldots$$

Наконец, объясним, что выделенные треугольники действительно заменяют точные тройки. А именно, покажем, что

**Предложение 11.** *Любая точная тройка комплексов* $0 \to K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \to 0$ *дополняется до выделенного треугольника* $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \to K[1]$ *в производной категории.*

*Доказательство.* Для этого покажем, что диаграмма $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M$ изоморфна в производной категории диаграмме $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{a} C(f)$ (которая дополняется до стандартного выделенного треугольника). Зададим морфизм комплексов $u\colon C(f) \to M$ равенством $u(l,k) := g(l)$. Несложно видеть, что $u$ — морфизм комплексов и включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & L \arrow[r, "a"] \arrow[d, equal] & C(f) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "u"] & K[1] \arrow[d, equal] \\
K \arrow[r, "f"] & L \arrow[r, "g"] & M \arrow[r, "bu^{-1}"] & K[1].
\end{tikzcd}$$

Написав длинные точные последовательсти когомологий, можно проверить, что $u$ — квазиизоморфизм. Определим морфизм $M \to K[1]$ как $bu^{-1}$. Теперь видно, что нижний треугольник выделенный как изоморфный стандартному. □

**Задача 10.** Проверьте, что морфизм $u$ — квазиизоморфизм.