13.10.2020
Лекция 6

Производные категории модулей над кольцом

Помимо производной категории $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ всех комплексов над абелевой категорией $\mathcal{A}$, рассматривают также ограниченные версии. Обозначим через $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}^+(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}^-(\mathcal{A})$ соответственно категории ограниченных, ограниченных слева, ограниченных справа комплексов над $\mathcal{A}$. Имеем строго полные вложения

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^b(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}^+(\mathcal{A}) \arrow[d] \\ \mathcal{C}^-(\mathcal{A}) \arrow[r] & \mathcal{C}(\mathcal{A}). \end{tikzcd}$$

Аналогично имеются строго полные вложения гомотопичеких категорий

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^b(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}^+(\mathcal{A}) \arrow[d] \\ \mathcal{H}^-(\mathcal{A}) \arrow[r] & \mathcal{H}(\mathcal{A}). \end{tikzcd}$$

Определение 1. Для $* = b, +$ или $-$, определим $\mathcal{D}^*(\mathcal{A})$ как локализацию категории $\mathcal{H}^*(\mathcal{A})$ по квазиизоморфизмам.

Как и для неограниченной производной категории, проверяется, что квазиизоморфизмы удовлетворяют условиям Оре, согласованы с триангулированной структурой на $\mathcal{H}^*(\mathcal{A})$ и мы получаем функтор локализации $\mathcal{H}^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^*(\mathcal{A})$ между триангулированными категориями. Можно определить ограниченные версии производной категории и по-другому, как полные подкатегории в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Задача 1. Имеются строго полные функторы

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \arrow[d] \\ \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \arrow[r] & \mathcal{D}(\mathcal{A}). \end{tikzcd}$$

Обозначим через $\mathcal{D}^{\infty,b}(\mathcal{A})$ полную подкатегорию в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, состоящую из комплексов с конечным числом ненулевых когомологий.

Задача 2. Покажите, что существенный образ функтора $\mathcal{D}^b(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ есть $\mathcal{D}^{\infty,b}(\mathcal{A})$.

Пусть теперь A — нётерово кольцо, а $* \in \{b, +, -, \emptyset\}$. Можно рассмотреть производные категории $\mathcal{D}^*(\mathrm{Mod}{-}A)$ и $\mathcal{D}^*(\mathrm{mod}{-}A)$. Обозначим также через $\mathcal{D}^b_{fg}(\mathrm{Mod}{-}A) \subset \mathcal{D}^b(\mathrm{Mod}{-}A)$ полную подкатегорию из комплексов с конечно-порождёнными когомологиями.

Задача 3. Пусть A — нётерово кольцо и $M \in \mathcal{D}^b_{fg}(\mathrm{Mod}{-}A)$ — комплекс. Покажите, что существует такой подкомплекс $M' \subset M$, что $M' \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}A)$ и M' квазиизоморфен M.

Предложение 2. *Естественный функтор $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}A) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{Mod}{-}A)$ строго полон, его существенный образ есть $\mathcal{D}^b_{fg}(\mathrm{Mod}{-}A)$.*

Доказательство. Второе утверждение сразу следует из задачи 3. Для проверки первого используйте описание морфизмов через классы эквивалентности домиков и опять же задачу 3. $\square$

Определение 3. *Точным функтором* между триангулированными категориями называются такие аддитивный функтор $F\colon \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ вместе с фиксированным изоморфизмом $\varepsilon\colon F\circ[1]_{\mathcal{T}_1} \to [1]_{\mathcal{T}_2}\circ F$, что для любого выделенного треугольника

$$X \to Y \to Z \xrightarrow{h} X[1]$$

в $\mathcal{T}_1$ треугольник

$$F(X) \to F(Y) \to F(Z) \xrightarrow{h'} F(X)[1]$$

выделен в $\mathcal{T}_2$, где морфизм h' есть композиция $F(Z) \xrightarrow{F(h)} F(X[1]_{\mathcal{T}_1}) \xrightarrow{\varepsilon(X)} F(X)[1]_{\mathcal{T}_2}$. Говоря проще, точный функтор — это функтор, сохраняющий сдвиг и выделенные треугольники.

Известный нам пример точного функтора — локализация триангулированной категории по хорошему классу морфизмов, например $\mathcal{H}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Напомним, что полная подкатегория называется *строгой*, если она замкнута относительно изоморфизмов: любой объект, изоморфный объекту подкатегории, также в ней содержится. Для любой подкатегории можно рассмотреть её *строгое замыкание.*

Определение 4. Полная строгая подкатегория $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ триангулированной категории называется *триангулировнной*, если для любого $X \in \mathcal{T}'$ верно $X[1], X[-1] \in \mathcal{T}'$, и для любого выделенного треугольника, две вершины которого лежат в $\mathcal{T}'$, третья вершина также лежит в $\mathcal{T}'$. Полная (не обязательно строгая) подкатегория $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ *триангулированная*, если таково строгое замыкание $\mathcal{T}'$. Говоря проще, триангулированная подкатегория — это подкатегория, замкнутая относительно сдвигов и взятия конусов.

Задание триангулированной подкатегории равносильно заданию точного строго полного функтора между триангулированными категориями.

Определение 5. Подкатегория $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ триангулированной категории называется *толстой*, если $\mathcal{T}'$ полная, строгая (т.е., замкнутая относительно изоморфизмов) и идемпотентно замкнутая: из $F \oplus F' \in \mathcal{T}'$ следует $F, F' \in \mathcal{T}'$.

Приведём пример (существенно) не толстой триангулированной подкатегории.

Пример 6. Пусть k — поле, $\mathcal{T} = \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k})$ и

$$\mathcal{T}' = \{X \mid \sum_i \dim H^i(X) \vdots 2\} \subset \mathcal{T}.$$

Тогда $\mathcal{T}'$ триангулированна (см. ДТП в когомологиях, связанную с выделенным треугольником), не не толстая: $\mathsf{k} \notin \mathcal{T}'$, но $\mathsf{k} \oplus \mathsf{k} \in \mathcal{T}'$.

Определение 7. Пусть X — комплекс над абелевой категорией $\mathcal{A}$. X называется *h-проективным*, если для любого ацикличного комплекса Y имеем $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}(X, Y) = 0$. Обозначим через

$$hProj(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}(\mathcal{A})$$

гомотопическую категорию h-проективных комплексов над $\mathcal{A}$.

Предложение 8. *Подкатегория $hProj(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}(\mathcal{A})$ толстая и замкнутая относительно произвольных прямых сумм.*

Доказательство. То, что $hProj(\mathcal{A})$ замкнута относительно идемпотентов и прямых сумм, очевидно. То, что она триангулированна, следует из длинной точной последовательности $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}(-, Y)$ для данного ацикличного Y. $\square$

Кстати, чтобы говорить о (бесконечных) прямых суммах в категориях комплексов, полезно решить следующую задачу.

Задача 4. Пусть $X_i, i \in I$ — комплексы над абелевой категорией $\mathcal{A}$, в которой существуют произвольные прямые суммы. Определим $\oplus_i X_i$ как почленную прямую сумму комплексов.
a) Покажите, что $\oplus X_i$ является прямой суммой (т.е. копроизведением) в категориях $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{H}(\mathcal{A})$.
b) Пусть в $\mathcal{A}$ прямые суммы точные (например, $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}{-}A$ для кольца A). Тогда $\oplus X_i$ является прямой суммой в категории $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Предложение 9. *Пусть $X \in hProj(\mathcal{A})$. Тогда*

1. *Любой квазиизоморфизм $s\colon Y_1 \to Y_2$ индуцирует изоморфизм*
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}(X, Y_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}(X, Y_2).$$

2. *Для любого комплекса Y имеем*
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, Y).$$

Доказательство. 1. Дополним s до выделенного треугольника $Y_1 \to Y_2 \to C(s) \to Y_1[1]$. Комплекс $C(s)$ будет ацикличен, значит $\mathrm{Hom}^i_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}(X, C(s)) = 0$. Применяя ДТП из $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}(X, -)$ к указанному треугольнику, получим требуемое.

2. Пусть есть квазиизоморфизм $s\colon X' \to X$. Из пункта 1 следует, что найдётся квазиизоморфизм $t\colon X \to X'$, так что $st = 1_X$ в $\mathcal{H}(\mathcal{A})$. Отсюда и из описания морфизмов в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ через домики всё следует — любой домик с началом в X мажорируется домиком вида $f1_X^{-1}$. $\square$

Следствие 10. *Композиция вложения и локализации*
$$hProj(\mathcal{A}) \overset{\subseteq}{\to} \mathcal{H}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$$
строгая и полная.

Но насколько много h-проективных комплексов? Зависит от абелевой категории.

Предложение 11. *Пусть $P \in \mathcal{C}^-(\mathcal{A})$ — ограниченный справа комплекс проективных объектов. Тогда P h-проективен.*

Задача 5. Докажите это, используя определение — вручную постройте гомотопию нулю любого морфизма из P в ацикличный комплекс.

Ограниченные справа комплексы проективных объектов — основной пример h-проективных комплексов.

Определение 12. Говорят, что в абелевой категории $\mathcal{A}$ *достаточно много* проективных объектов, если для любого $M \in \mathcal{A}$ существует проективный $P \in \mathcal{A}$ и сюръекция $P \to M$.

Пример 13. Пусть A — кольцо, тогда в $\mathrm{Mod}{-}A$ достаточно много проективных объектов. Если A нётерово, то и в $\mathrm{mod}{-}A$ достаточно много проективных объектов.

Предложение 14. *Пусть в $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов. Тогда для любого комплекса $X \in \mathcal{C}^-(\mathcal{A})$ существует комплекс $P \in \mathcal{C}^-(\mathcal{A})$ из проективных членов и квазиизоморфизм $P \to X$.*

Такой комплекс P называют *проективной резольвентой* комплекса X.

Задача 6. Докажите предложение 14, шаг за шагом построив резольвенту.

Следствие 15. *Пусть в $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов. Тогда ограничение функтора из следствия 10*

$$hProj^-(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{A})$$

— эквивалентность. Обозначим через $hProj^{-,b}(\mathcal{A}) \subset hProj^-(\mathcal{A})$ полную подкатегорию из комплексов с конечным числом когомологий. Тогда имеется эквивалентность

$$hProj^{-,b}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^b(\mathcal{A}).$$

Сформулируем ещё раз примерно то же самое, максимально конкретно.

Следствие 16. *Пусть A — кольцо, $X, Y \in \mathcal{C}(\mathrm{Mod}{-}A)$ — комплексы, X ограничен справа. Выберем квазиизоморфизм $P \to X$, где P — ограниченный справа комплекс проективных модулей. Тогда*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}-A)}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathrm{Mod}-A)}(P, Y).$$

Наконец, сформулируем следующий замечательный факт.

Теорема 17. *Пусть A — кольцо. Для любого $X \in \mathcal{C}(\mathrm{Mod}{-}A)$ существует h-проективный комплекс P и квазиизоморфизм $P \to X$. Как следствие, имеем эквивалентность*

$$hProj(\mathrm{Mod}{-}A) \to \mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A).$$

Доказательство использует понятие гомотопического копредела, мы вынуждены отказать себе в удовольствии его привести.

Мы хотели бы проверить, что для конечномерной k-алгебры A категория

$$T = \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}A)$$

обладает свойством Крулля-Шмидта. Для этого, согласно результатам первой лекции, достаточно проверить две вещи:

1. пространства $\mathrm{Hom}_T(X, Y)$ конечномерны для всех $X, Y \in T$,
2. категория T идемпотентно замкнута.

Первое нетрудно вывести из следствия 16. Действительно, все члены комплексов P и Y конечномерны и

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathrm{mod}-A)}(P, Y) \quad \text{— фактор некоторого подпространства в} \quad \oplus_i \mathrm{Hom}_{\mathsf{k}}(P^i, Y^i),$$

где сумма конечна, так как Y конечен.

Напротив, проверить идемпотентную замкнутость категории T (и вообще любой триангулировнной категории) в лоб не получится. Мы будем пользоваться следующей замечательной теоремой, которую приведём без доказательства (оно также основано на гомотопическом копределе).

Теорема 18. *Пусть T — триангулированная категория, в которой существует счётная прямая сумма $\oplus_{i\in\mathbb{Z}}X$ объекта X с собой. Тогда любой идемпотент $e\colon X\to X$ расщепляется.*

Определение 19. Триангулированную категорию называют *карубиевой*, если она идемпотентно замкнута, т.е. в ней любой идемпотент расщепляется.

Замечание 20. Любая толстая подкатегория карубиевой категории карубиева.

Из теоремы 18 вытекает

Следствие 21. *Для любого кольца любой вариант производной категории $\mathcal{D}^*(\mathrm{Mod}{-}A)$ карубиев.*

А из него вытекает

Следствие 22. *Для любого нётерова кольца категория $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}A)$ карубиева.*

Доказательство. Действительно, по предложению 2 категория $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}A)$ эквивалентна $\mathcal{D}^b_{fg}(\mathrm{Mod}{-}A)$. Последняя, в свою очередь, есть толстая (очевидно) подкатегория карубиевой категории $\mathcal{D}^b(\mathrm{Mod}{-}A)$. $\square$

Наконец, определим категорию совершенных комплексов. Пусть A — кольцо.

Определение 23. *Строгим совершенным комплексом* называется конечный комплекс из конечно порождённых проективных модулей. *Совершенным комплексом* называется любой комплекс, квазиизоморфный строгому совершенному комплексу.

Обозначим через $\mathcal{P}erf(A)\subset\mathcal{H}(\mathrm{Mod}{-}A)$ полную подкатегорию, образованную строгими совершенными комплексами. Это триангулированная подкатегория! Обозначим через $\mathrm{Perf}(A)\subset\mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A)$ полную подкатегорию, образованную совершенными комплексами, она также триангулированна.

Из предложения 11 и следствия 10 вытекает, что строгие совершенные комплексы h-проективны и что категории $\mathcal{P}erf(A)$ и $\mathrm{Perf}(A)$ эквивалентны. Кроме того, если A нётерово, то строгие совершенные комплексы лежат в $\mathcal{C}^b(\mathrm{mod}{-}A)$ и можно определить $\mathrm{Perf}(A)$ как полную подкатегорию совершенных комплексов в $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}A)$, она эквивалентна введённой выше.

Предложение 24. *Пусть кольцо A нётерово. Тогда следующие покатегории $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}A)$ совпадают:*

1. $\mathrm{Perf}(A)$;
2. $\langle A\rangle$ — *наименьшая толстая подкатегория в $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}A)$, содержащая A;*
3. *категория $T:=\{X\mid \mathrm{pd}\,X<\infty\}\subset\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}A)$ объектов конечной проективной размерности. Условие $\mathrm{pd}\,X<\infty$ означает, что при некотором n_0 и любых $n>n_0$, $M\in\mathrm{mod}{-}A$ имеем $\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}-A)}(X,M)=0$.*

Доказательство. Во-первых, проверим, что $\mathrm{Perf}(A)\subset\langle A\rangle$. Действительно, в $\langle A\rangle$ лежат все конечно порождённые свободные модули, а значит и конечно порождённые проективные. Следовательно, там лежат и все строго совершенные комплексы (проверяется разрезанием их на отдельные члены).

Во-первых, проверим, что $\langle A\rangle \subset T$. Действительно, несложно видеть, что подкатегория T толстая и содержит свободный модуль A. Значит, она содержит и $\langle A\rangle$ по определению последней.

Наконец, покажем, что $T \subset \mathrm{Perf}(A)$. Пусть $X \in \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}A)$ — комплекс конечной проективной размерности. Построим по предложению 14 квазиизоморфизм $P \to X$, где P — ограниченный справа комплекс конечно порождённых проективных модулей. Отметим, что $H^n(P) = 0$ при $n << 0$. Покажем, что при $n << 0$ подмодуль $B^n \subset P^n$ выделяется прямым слагаемым. Тогда P^n/B^n также проективен, и P квазиизоморфен комплексу

$$\tau_{\geqslant n}P = [\ldots \to 0 \to P^n/B^n \to P^{n+1} \to \ldots],$$

который строго совершенный.

Рассмотрим подкомплекс $P' = [\ldots \to 0 \to P^n \to P^{n+1} \to \ldots]$ в P и соответствующий факторкомплекс $P'' = [\ldots \to P^{n-2} \to P^{n-1} \to 0 \to 0 \to \ldots]$. При $n << 0$ у P'' есть единственная когомология $H^{n-1}(P'') \cong B^n$, значит P'' квазиизоморфен $B^n[1-n]$. Рассмотрим выделенные треугольники $P' \to P \xrightarrow{f} B^n[1-n] \to P'[1]$ и

$$B^n[-n] \xrightarrow{g} P' \to P \xrightarrow{f} B^n[1-n],$$

полученные заменой P'' на $B^n[1-n]$. В них $f = 0$ в $\mathcal{D}(\mathrm{mod}{-}A)$ при $n << 0$, так как $\operatorname{pd} P = \operatorname{pd} X < \infty$. Следовательно, g имеет левый обратный g' в $\mathcal{D}(\mathrm{mod}{-}A)$. Заметим, что g задаётся вложением модулей $g^n\colon B^n \to P^n$. Кроме того, любой морфизм $P' \to B^n[-n]$ в $\mathcal{D}(\mathrm{mod}{-}A)$ задаётся морфизмом комплексов, так как P' h-проективен. Значит, g' задан гомоморфизмом модулей $(g')^n\colon P^n \to B^n$. При этом $(g')^n g^n = 1_{B^n}$, так как $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathrm{mod}-A)}(B^n[-n], B^n[-n]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod}-A}(B^n, B^n)$. Таким образом, B^n выделяется в P^n прямым слагаемым при $n << 0$. $\square$

Следствие 25. *Для нётерова кольца A категория* $\mathrm{Perf}(A)$ *карубиева.*