# Двойственность для модулей над алгеброй

Сегодня продолжим изучать модули над конечномерными алгебрами. Напомним, что через $\mathrm{Mod}{-}A$ и $A{-}\mathrm{Mod}$ мы обозначаем категории правых и левых модулей над алгеброй $A$ соответственно, а через $\mathrm{mod}{-}A$ и $A{-}\mathrm{mod}$ — их подкатегории конечно порождённых модулей. Аналогично мы будем использовать обозначения $\mathrm{Proj}-A$, $\mathrm{proj}-A$, $A-\mathrm{Proj}$, $A-\mathrm{proj}$, $\mathrm{Inj}-A$, $\mathrm{inj}-A$, $A-\mathrm{Inj}$, $A-\mathrm{inj}$ для категорий проективных и инъективных модулей.

Начнём со следующего факта

**Предложение 1.** *Пусть $A$ — конечномерная алгебра над полем $\mathsf{k}$. Тогда между неразложимыми проективными и простыми $A$-модулями есть биекция. При этом можно так занумеровать их, что (где $P_i$ — проективные, а $S_i$ — простые)*

$$\mathrm{Hom}(P_i, S_j) \neq 0 \Longleftrightarrow i = j.$$

Мы доказали это предложение две лекции назад для алгебры путей в колчане — и простые, и неразложимые проективные модули соответствуют вершинам колчана. Как мы видели (в силу теорем Габриэля), это даёт доказательство предложения 1 для любой конечномерной алгебры над алгебраически замкнутым полем.

**Задача 1.** Докажите предложение 1 в общем случае, пользуясь общими свойствами модулей и теорией Крулля-Шмидта.

А как устроены инъективные модули? Для колец вообще (вроде $\mathbb{Z}$, $\mathsf{k}[x]$) они ведут себя непохоже на проективные — например, они всегда бесконечно порождены. Однако для конечномерных алгебр инъективные модули очень похожи на проективные. Причина в том, что категории правых и левых конечномерных модулей двойственны друг другу.

Пусть $A$ — алгебра над $\mathsf{k}$, а $M$ — правый $A$-модуль. Обозначим

$$M^* := \mathrm{Hom}_{\mathsf{k}}(M, \mathsf{k}),$$

это левый $A$-модуль. Для гомоморфизма $f\colon M \to N$ правых $A$-модулей двойственное отображение $f^*\colon N^* \to M^*$ есть гомоморфизм левых $A$-модулей. Таким образом, имеем функтор **$\mathsf{k}$-линейной двойственности**

$$*\colon \mathrm{Mod}{-}A \to (A{-}\mathrm{Mod})^{op}$$

(или $(\mathrm{Mod}{-}A)^{op} \to A{-}\mathrm{Mod}$). Аналогично есть функтор $*$ из левых модулей в правые. Можно применить $*$ два раза и получить ковариантные функторы $\mathrm{Mod}{-}A \to \mathrm{Mod}{-}A$ и $A{-}\mathrm{Mod} \to A{-}\mathrm{Mod}$. Кроме того, вложение $M \to M^{**}$ модулей задаёт морфизм функторов $\mathrm{id} \to **$.

Функтор $*$ переводит конечномерные модули в конечномерные, а морфизм $\mathrm{id} \to **$ на них есть изоморфизм. Поэтому $*$ задаёт эквивалентность между конечномерными правыми и левыми модулями, обратной к которой будет также $*$. В частности, получаем

**Предложение 2.** *Пусть $A$ — конечномерная алгебра. Функтор $*$ задаёт взаимно обратные эквивалентности*

$$\mathrm{mod}{-}A \longleftrightarrow A{-}\mathrm{mod}.$$

*Его ограничения задают эквивалентности и биекции*

$$\mathrm{proj}-A \longleftrightarrow (A-\mathrm{inj})^{op},$$
$$\mathrm{inj}-A \longleftrightarrow (A-\mathrm{proj})^{op},$$
$$\{\textit{простые в } \mathrm{mod}{-}A\} \longleftrightarrow \{\textit{простые в } A{-}\mathrm{mod}\},$$
$$\mathrm{Ind}(\mathrm{mod}{-}A) \longleftrightarrow \mathrm{Ind}(A{-}\mathrm{mod}).$$

*Доказательство.* Действительно, проективные объекты абелевой категории — это инъективные объекты двойственной категории и наоборот. □

**Предложение 3.** *Пусть $A$ — конечномерная алгебра.*

1. *В категории* $\mathrm{mod}{-}A$ *достаточно много инъективных объектов, т.е. каждый объект вкладывается в инъективный.*
2. *Модуль $A^*$ — инъективный когенератор* $\mathrm{mod}{-}A$*, т.е. любой модуль вкладывается в $(A^*)^n$ для некоторого $n$.*
3. *Между простыми и неразложимыми инъективными $A$-модулями есть биекция. При этом можно так занумеровать их, что (где $S_i$ — простые, а $I_i$ — инъективные)*
$$\mathrm{Hom}(S_i, I_j) \neq 0 \Longleftrightarrow i = j.$$

Посмотрим, как выглядит двойственность для представлений колчанов. Пусть $A$ — алгебра путей колчана с соотношениями (по умолчанию, мы считаем, что соотношения допустимы).

**Задача 2.** Пусть $M$ — конечномерный правый модуль над алгеброй путей колчана с соотношениями. Тогда $e_i(M^*) = (Me_i)^*$.

Из этой задачи следует, что если модуль $M$ соответствует представлению колчана $(M_i, m_a)_{i\in\Gamma_0, a\in\Gamma_1}$, то двойственный модуль соответствует двойственному представлению $(M_i^*, m_a^*)_{i\in\Gamma_0, a\in\Gamma_1}$.

Опишем явно неразложимые инъективные модули над алгеброй путей $A$. Правый инъективный модуль $I_i$ определим как двойственный к левому проективному модулю $P_i$, который есть по определению $Ae_i$. Тем самым, $I_i = (Ae_i)^* = e_i(A^*)$ по задаче 2. Компоненты этого представления суть
$$(I_i)_j = (I_i)e_j = e_i(A^*)e_j = (e_jAe_i)^* = \langle \text{пути из } i \text{ в } j \text{ по модулю соотношений} \rangle^*.$$

В теории представлений $\mathsf{k}$-линейная двойственность обычно обозначается буквой $D$ — двойственный к $M$ есть $DM$.

Помимо $\mathsf{k}$-линейной двойсвенности $*$, рассматривают также $A$-линейную двойственность, которую мы обозначим $\vee$. Для любого кольца $A$ и $M \in \mathrm{Mod}{-}A$ обозначим
$$M^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}-A}(M, A).$$
Кольцо $A$ действует на $M^\vee$ слева по правилу $(a\cdot f)(m) := a \cdot f(m)$ (где $a \in A$, $m \in M$, $f \in M^\vee$). Это превращает $M^\vee$ в левый $A$-модуль, который мы будем называть дуальным к $M$. Для гомоморфизма $M \to N$ правых модулей двойственное отображение $N^\vee \to M^\vee$ есть гомоморфизм левых модулей, тем самым имеем функтор **$A$-линейной двойственности** или **дуализации**
$$\vee\colon \mathrm{Mod}{-}A \to (A{-}\mathrm{Mod})^{op}.$$
Аналогично есть функтор $\vee$ из левых модулей в правые. Можно применить $\vee$ два раза и получить ковариантные функторы $\mathrm{Mod}{-}A \to \mathrm{Mod}{-}A$ и $A{-}\mathrm{Mod} \to A{-}\mathrm{Mod}$. Кроме того, вложение $M \to M^{\vee\vee}$ модулей задаёт морфизм функторов $\mathrm{id} \to \vee\vee$.

Проделаем тривиальное, но важное вычисление: $A^\vee \cong A$.

Функтор $\vee$ точен слева, в частности, переводит сюръекции в инъекции. Поэтому для нётерова кольца $\vee$ переводит конечно порождённые модули в конечно порождённые. Однако дважды дуальный модуль, как правило, не изоморфен исходному. Поэтому дуализация не даёт эквивалентности на конечно порождённых модулях, но даёт её на конечно порождённых проективных модулях.

**Предложение 4.** *Пусть $A$ — кольцо. Функтор $\vee$ задаёт взаимно обратные эквивалентности*

$$\mathrm{proj}-A \longleftrightarrow (A-\mathrm{proj})^{op}$$

*между конечно порождёнными проективными правыми и левыми модулями.*

*Доказательство.* Во-первых, $A^\vee \cong A$, поэтому $\vee$ переводит свободные конечно порождённые и свободные конечно порождённые и конечно порождёнными проективные в конечно порождённые проективные (как прямые слагаемые свободных). Во-вторых, морфизм функторов $\mathrm{id} \to \vee\vee$ на $\mathrm{Mod}-A$ есть изоморфизм на объекте $A$, а значит и на любом свободном конечно порождённом и на конечно порождённом проективном модуле. $\square$

Естественно применить две дуализации последовательно. Полученный функтор называется фунтором Накаямы.

**Определение 5.** Пусть $A$ — алгебра над $\mathsf{k}$. Определим *функтор Накаямы* $\nu\colon \mathrm{Mod}-A \to \mathrm{Mod}-A$ как

$$\nu(M) := (M^\vee)^*$$

и *обратный функтор Накаямы* $\nu^-\colon \mathrm{Mod}-A \to \mathrm{Mod}-A$ как

$$\nu^-(M) := (M^*)^\vee.$$

Из сказанного выше вытекает

**Предложение 6.** *Пусть $A$ — конечномерная алгебра. Тогда функтор $\nu$ точен справа, а $\nu^-$ — слева. Они задают эквивалентности*

$$\nu\colon \mathrm{proj}-A \xrightarrow{\sim} \mathrm{inj}-A, \quad \nu^-\colon \mathrm{inj}-A \xrightarrow{\sim} \mathrm{proj}-A.$$

*Имеем $\nu(A) \cong A^*$.*

Можно проверить, что функтор Накаямы переводит неразложимый проективный модуль в тот самый неразложимый инъективный модуль, который ему соответствует при описанных в предложениях 1 и 3 биекциях. В частности, для алгебр путей в колчане имеем $\nu(P_i) \cong I_i$. Например, это вытекает из следующего факта (о том, что функтор Накаямы — приближение к функтору Серра, который мы изучим позже).

**Предложение 7.** *Для любой $\mathsf{k}$-алгебры $A$, любого $A$-модуля $M$ и конечно порождённого проективного $A$-модуля $P$ имеется изоморфизм векторных пространств, функториальный по $P$ и $M$:*

$$\mathrm{Hom}(P, M)^* \cong \mathrm{Hom}(M, \nu(P)).$$

Для доказательства сформулируем две полезные леммы.

**Лемма 8.** *Пусть $A$ — кольцо, $P \in \mathrm{proj}-A$, $M \in \mathrm{Mod}-A$. Тогда имеется функториальный изоморфизм*

$$M \otimes_A P^\vee \cong \mathrm{Hom}_A(P, M).$$

*Доказательство.* Для любых модулей $P, M$ имеется естественный морфизм из $M \otimes_A \mathrm{Hom}_A(P, A)$ в $\mathrm{Hom}_A(P, M)$, который переводит $m \otimes w$ в гомоморфизм $p \mapsto m \cdot w(p)$. Этот морфизм — изоморфизм для $P = A$ (потому что обе части есть $M$), а значит и для конечно порождённых свободных и проективных модулей. $\square$

**Лемма 9.** *Пусть $A, B, C$ — $\mathsf{k}$-алгебры, $M \in B{-}\mathrm{Mod}{-}A$, $N \in A{-}\mathrm{Mod}{-}C$, $K \in B{-}\mathrm{Mod}{-}C$ — бимодули. Тогда имеется функториальный изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}_{B-\mathrm{Mod}-C}(M \otimes_A N, K) \cong \mathrm{Hom}_{B-\mathrm{Mod}-A}(M, \mathrm{Hom}_C(N, K)).$$

*Доказательство.* Обе части изоморфны группе $\mathsf{k}$-билинейных отображений $f\colon M \times N \to K$, для которых $f(bm, n) = bf(m, n)$, $f(m, nc) = f(m, n)c$ и $f(ma, n) = f(m, an)$. $\square$

*Доказательство предложения 7.* Имеем, учитывая леммы 8 и 9

$$\mathrm{Hom}_A(P, M)^* = \mathrm{Hom}_{\mathsf{k}}(\mathrm{Hom}_A(P, M), \mathsf{k}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{k}}(M \otimes_A P^\vee, \mathsf{k}) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathsf{k}}(P^\vee, \mathsf{k})) = \\ = \mathrm{Hom}_A(M, \nu(P)).$$

$\square$

Теперь обратимся к классической гомологической алгебре.

Для абелевой категории $\mathcal{A}$ мы определили группы Ext между объектами $M, N \in \mathcal{A}$:

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, N) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(M, N[i]).$$

Как их вычислять? Это удобно делать, если в категории $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов.

**Предложение 10.** *Пусть $P$ — проективная резольвента $M$. Тогда*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, N) \cong H^i(\mathrm{Hom}(P, M)) = H^i([\mathrm{Hom}(P^0, M) \to \mathrm{Hom}(P^{-1}, M) \to \ldots]).$$

*Доказательство.* Как мы знаем,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(M, N[i]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(P, N[i]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{A})}(P, N[i]).$$

Как несложно видеть, циклы комплекса $\mathrm{Hom}(P, M)$ — это морфизмы комплексов $P \to N[i]$, а границы комплекса $\mathrm{Hom}(P, M)$ — это гомотопные нулю морфизмы $P \to N[i]$. Переходя к факторам, получаем требуемое. $\square$

Основной инструмент для вычисления групп Ext — длинная точная последовательность.

**Предложение 11.** *Пусть $0 \to M \to N \to K \to 0$ — точная последовательность в $\mathcal{A}$, а $X$ — объект $\mathcal{A}$. Тогда имеются точные последовательности*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X, M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X, N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X, K) \arrow[dll] \\
& \mathrm{Ext}^1(X, M) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(X, N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(X, K) \arrow[dll] \\
& \mathrm{Ext}^2(X, M) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2(X, N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^2(X, K) \arrow[dll] \\
& \ldots & &
\end{tikzcd}$$

*и*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(M,X) \arrow[drr] & \mathrm{Hom}(N,X) \arrow[l] & \mathrm{Hom}(K,X) \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
\mathrm{Ext}^1(M,X) \arrow[drr] & \mathrm{Ext}^1(N,X) \arrow[l] & \mathrm{Ext}^1(K,X) \arrow[r] & {} \\
\mathrm{Ext}^2(M,X) \arrow[drr] & \mathrm{Ext}^2(N,X) \arrow[l] & \mathrm{Ext}^2(K,X) \arrow[l] & \\
& & \dots &
\end{tikzcd}$$

*Доказательство.* Следует из того, что в производной категории есть выделенный треугольник $M \to N \to K \to M[1]$ и ДТП морфизмов в триангулированной категории. $\square$

**Предложение 12.** *Пусть $M \in \mathcal{A}$ — объект. Тогда следующие условия равносильны:*

1. *$M$ проективен;*
2. *$\mathrm{Ext}^i(M,N) = 0$ при всех $i > 0$ и $N \in \mathcal{A}$;*
3. *$\mathrm{Ext}^1(M,N) = 0$ при всех $N \in \mathcal{A}$.*

*Доказательство.* (1) $\Rightarrow$ (2) следует из предложения 10, где можно взять $P = M$.

(2) $\Rightarrow$ (3) очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (1) проверяется по определению. Пусть $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ — точная последовательность. Тогда по предложению 11 есть точная последовательность

$$\mathrm{Hom}(M,Y) \to \mathrm{Hom}(M,Z) \to \mathrm{Ext}^1(M,X) = 0.$$

А значит, отображение $\mathrm{Hom}(M,Y) \to \mathrm{Hom}(M,Z)$ сюръективно, что и означает проективность $M$. $\square$

**Определение 13.** Пусть $M \in \mathcal{A}$ — объект абелевой категории. Его *проективная размерность* определяется как

$$\mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(M) := \max\{i \mid \exists N \in \mathcal{A} \quad \text{такой, что} \quad \mathrm{Ext}^i(M,N) \neq 0.\}$$

Предложение 12 можно сформулировать так: $M$ проективен титтк $\mathrm{pd}(M) = 0$.

**Предложение 14.** *Пусть $0 \to M \to N \to K \to 0$ — точная последовательность. Тогда*

1. *$\mathrm{pd}(N) \leqslant \max(\mathrm{pd}(M), \mathrm{pd}(K))$.*
2. *Пусть $N$ проективен. Тогда*

$$\mathrm{pd}(M) = \begin{cases} \mathrm{pd}(K) - 1, & \mathrm{pd}(K) > 0 \\ 0, & \mathrm{pd}(K) = 0. \end{cases}$$

**Задача 3.** Докажите это предложение.

Если в $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов, то смотреть на проективную размерност можно по-другому.

**Предложение 15.** *Пусть в $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов. Тогда*

$$\mathrm{pd}(M) = \min\{\textit{длины проективных резольвент } M\}.$$

*Доказательство.* По сути, надо проверить при всех $n$ равносильность условий:

- $\mathrm{Ext}^i(M, -) = 0$ при всех $i > n$;
- у $M$ есть проективная резольвента длины не более $n$.

Следствие вверх очевидно, так как $\mathrm{Ext}(M, -)$ можно вычислять при помощи этой не очень длинной резольвенты. Проверим следствие вниз по индукции по $n$. При $n = 0$ видим, что $M$ проективен в силу предложения 12. Можно взять сам $M$ в качестве резольвенты длины 0. Если $n > 0$, накроем $M$ проективным объектом $P^0$ и обозначим ядро через $M'$. По предложению 14, имеем $\mathrm{pd}(M') = \mathrm{pd}(M) - 1 \leqslant n - 1$, и значит по предположению индукции у $M'$ есть проективная резольвента длины $\leqslant n-1$. Присоединяя её к $P^0$, получим нужную резольвенту для $M$. □

**Определение 16.** *Гомологической размерностью* абелевой категории $\mathcal{A}$ называется

$$hdim(\mathcal{A}) := \max\{i \mid \exists M, N \in \mathcal{A} \quad \text{такие, что} \quad \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, N) \neq 0\} = \max_{M \in \mathcal{A}} \mathrm{pd}_{\mathcal{A}}(M).$$

**Определение 17.** *Глобальной размерностью* кольца $A$ называется

$$\mathrm{gldim}(\mathcal{A}) := hdim(\mathrm{Mod}{-}A).$$

Если кольцо нётерово, можно показать, что $hdim(\mathrm{Mod}{-}A) = hdim(\mathrm{mod}{-}A)$, и обычно удобнее пользоваться последней формулой.

**Пример 18.** Глобальная размерность кольца $A$ равна нулю титтк $A$ изоморфно конечному прямому произведению колец матриц над телами. Это проверяется примерно так же, как аналогичный факт про полупростые конечномерные алгебры. Кольца с $\mathrm{gldim} = 0$ называются *полупростыми.* С точки зрения теории представлений такие кольца не интересны.

**Определение 19.** Кольцо $A$ называется *наследственным*, если $\mathrm{gldim}(A) \leqslant 1$.

**Предложение 20.** *Пусть* $\Gamma$ *— колчан, тогда* $\mathrm{gldim}(\mathsf{k}\Gamma) \leqslant 1$.

*Доказательство.* Покажем, что у любого модуля $M$ есть проективная резольвента длины 1. Напомним, что для неразложимых проективных модулей $P_i, i \in \Gamma_0$ пространство $\mathrm{Hom}(P_i, P_j)$ имеет базисом пути из $i$ в $j$, а $\mathrm{Hom}(P_i, M) \cong M_i$. Рассмотрим диаграмму

$$0 \to \oplus_{a\colon i \to j, a \in \Gamma_1} M_j \otimes P_i \xrightarrow{d_1} \oplus_{i \in \Gamma_0} M_i \otimes P_i \xrightarrow{d_0} M \to 0. \tag{1}$$

Здесь $d_0$ — каноническое отображение вычисления, а $d_1$ — разность отображений $a \otimes 1\colon M_j \otimes P_i \to M_i \otimes P_i$ и $1 \otimes a\colon M_j \otimes P_i \to M_j \otimes P_j$. Можно проверить, что (1) — точная последовательность, и её члены (кроме $M$) проективны. □

**Задача 4.** Проверьте точность (1).

**Лемма 21.** *Пусть $A$ — конечномерная алгебра, а $S_1, \ldots, S_n$ — все простые $A$-модули. Тогда*

$$\mathrm{gldim}(A) = \max_i \mathrm{pd}(S_i).$$

*Доказательство.* Следует из предложения 14(1) и того, что любой конечно порождённый модуль имеет конечную фильтрацию простыми модулями. □

Таким образом, вычислить глобальную размерность конечномерной алгебры можно, написав проективные резольвенты конечного числа простых модулей. Сделаем это для (конечномерной) алгебры путей колчана без ориентированных циклов.

*Доказательство предложения 20 для колчана без циклов.* Нетрудно видеть, что резольвентой $S_i$ будет комплекс

$$0 \to \oplus_{a\colon j\to i} P_j \to P_i \to S_i \to 0.$$

Действительно, в каждой вершине $k$ ядро накрытия $P_i \to S_i$ имеет базис из путей $k \to i$ положительной длины. А образ слагаемого, соответствующего стрелке $a$, имеет базисом ровно те пути из $k$ в $i$, которые кончаются на $a$. □

**Пример 22.** Пусть $A = \mathsf{k}\langle t\rangle = \mathsf{k}[t]/(t)$ — алгебра дуальных чисел. Она имеет единственный простой модуль $\mathsf{k}$, его проективная резольвента бесконечна и выглядит так:

$$\ldots A \xrightarrow{t} A \xrightarrow{t} A \xrightarrow{t} A.$$

Вычисляя Ext, имеем $\mathrm{Ext}^i_A(\mathsf{k},\mathsf{k}) = \mathsf{k}$ при всех $i \geqslant 0$. Тем самым, $\mathrm{gldim}(A) = \mathrm{pd}_A(\mathsf{k}) = \infty$.

**Пример 23.** Пусть

$$\Gamma = (1 \to 2 \to \ldots \to (n-1) \to n)$$

— линейный колчан типа $A_n$. Простые, неразложимые проективные и инъективные модули выглядят так:

$$S_i\colon (0 \leftarrow 0 \leftarrow \ldots \leftarrow 0 \leftarrow \mathsf{k} \leftarrow 0 \leftarrow \ldots \leftarrow 0),$$
$$P_i\colon (\mathsf{k} \leftarrow \mathsf{k} \leftarrow \ldots \leftarrow \mathsf{k} \leftarrow \mathsf{k} \leftarrow 0 \leftarrow \ldots \leftarrow 0),$$
$$I_i\colon (0 \leftarrow 0 \leftarrow \ldots \leftarrow 0 \leftarrow \mathsf{k} \leftarrow \mathsf{k} \leftarrow \ldots \leftarrow \mathsf{k}).$$

Модули $S_i$ имеют проективную резольвенту $[P_{i-1} \to P_i]$ при $i > 1$, модуль $S_1 = P_1$ проективен.

**Пример 24.** Пусть теперь $A$ — алгебра путей в линейном колчане типа $A_n$ с максимальными соотношениями: композиция любых двух стрелок равна нулю. Простые, неразложимые проективные и инъективные $A$-модули теперь выглядят так:

$$S_i\colon (0 \leftarrow \ldots \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \mathsf{k} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \ldots \leftarrow 0),$$
$$P_i\colon (0 \leftarrow \ldots \leftarrow 0 \leftarrow \mathsf{k} \leftarrow \mathsf{k} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \ldots \leftarrow 0),$$
$$I_i\colon (0 \leftarrow \ldots \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \mathsf{k} \leftarrow \mathsf{k} \leftarrow 0 \leftarrow \ldots \leftarrow 0)$$

(здесь $P_i$ сосредоточен в степенях $i-1$ и $i$, а $I_i$ — в степенях $i$ и $i+1$). Модули $S_i$ имеют проективную резольвенту $[P_1 \to P_2 \to \ldots \to P_{i-1} \to P_i]$. Тем самым, $\mathrm{pd}_A(S_i) = i-1$ и $\mathrm{gldim}(A) = n-1$.

Глобальная размерность в предыдущем примере — максимальная возможность для данной длины колчана.

**Определение 25.** *Длиной* колчана $\Gamma$ называется максимальная длина пути в $\Gamma$.

**Определение 26.** *Длиной* колчана $\Gamma$ называется минимальное такое $n$, что есть разбиение

$$\Gamma_0 = \sqcup_{i=0}^{n} \Gamma_0^{(i)},$$

для которого у любой стрелки $a$ с началом в $\Gamma_0^{(i)}$ и концом в $\Gamma_0^{(j)}$ верно $i < j$ (т.е. стрелки идут слева направо).

Длину $\Gamma$ будем обозначать $l(\Gamma)$. Она конечна титтк в $\Gamma$ нет ориентированных циклов.

**Задача 5.** Покажите, что данные определения длины равносильны.

**Задача 6.** Покажите, что для колчана $\Gamma$ и допустимого идеала соотношений $I$ верно неравенство

$$\operatorname{gldim}(\mathsf{k}\Gamma/I) \leqslant l(\Gamma).$$