24.11.2020
Лекция 11

Функтор Серра и регулярные модули

Сегодня мы продолжим изучать функторы отражений между производными категориями представлений колчанов. Для этого понадобится понятие функтора Серра.

Определение 1. Пусть $\mathcal{T}$ — Hom-конечная k-линейная категория. Функтор $S\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ называется *функтором Серра*, если S — автоэквивалентность, и для всех $X, Y \in \mathcal{T}$ имеются изоморфизмы векторных пространств

$$\mathrm{Hom}(X, Y)^* \cong \mathrm{Hom}(Y, S(X)), \tag{1}$$

функториальные по X, Y. Если категория $\mathcal{T}$ триангулированная, мы будем дополнительно требовать, чтобы S был точным.

Предложение 2. *Если функтор Серра существует, то он единствен с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Следует из леммы Йонеды: изомофизм бифункторов $\mathrm{Hom}(Y, S_1(X)) \cong \mathrm{Hom}(Y, S_2(X))$ влечёт изоморфизм функторов $S_1 \cong S_2$. □

Наша ближайшая цель — доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть A — конечномерная алгебра конечной глобальной размерности. Тогда функтор Серра на категории $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}A)$ существует, и задаётся “производным функтором Накаямы”:*

$$S(M) \cong R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathsf{k}}(R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, A), \mathsf{k}) \cong M \otimes_A^L A^*.$$

Для доказательства понадобится распостранить двойственность и дуализацию для модулей над алгебрами на производные категории. Мы будем для простоты далее предполагать, что A — конечномерная алгебра над полем.

Во-первых, рассмотрим производный функтор от точного функтора k-линейной двойственности. Получим функторы $R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathsf{k}}(-, \mathsf{k})$

$$\mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A) \longleftrightarrow \mathcal{D}(A{-}\mathrm{Mod}),$$

которые мы сегодня будем просто обозначать $*$. Они ограничиваются на функторы между категориями

$$\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}A) \longleftrightarrow \mathcal{D}^b(A{-}\mathrm{mod}),$$

которые будут взаимно обратными эквивалентностями.

Во-вторых, рассмотрим производный функтор от точного слева функтора A-линейной двойственности. Получим функторы $R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(-, A)$

$$\mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A) \longleftrightarrow \mathcal{D}(A{-}\mathrm{Mod}),$$

которые мы сегодня также будем просто обозначать $\vee$. При этом $A^\vee \cong A$, следовательно $\vee$ переводит $\mathrm{Perf}(A)$ в $\mathrm{Perf}(A^{op})$ и наоборот. Можно построить морфизм функторов $\mathrm{id} \to \vee\vee$. Он будет изоморфизмом на некоторой толстой подкатегории в $\mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A)$, содержащей свободный модуль A, а значит и на всей категории совершенных комплексов. Следовательно, $\vee$ задаёт взаимно обратные эквивалентности

$$\mathrm{Perf}(A) \leftrightarrow \mathrm{Perf}(A^{op}).$$

Так же, как и для самих модулей, можно доказать следующее

Предложение 4. *Пусть A — произвольная k-алгебра, $M \in \mathrm{Perf}(A)$, $N \in \mathcal{D}(\mathrm{Mod}{-}A)$. Тогда имеется изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}-A)}(M, N)^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}-A)}(N, M^{\vee *}),$$

функториально зависящий от M, N.

Доказательство. Во-первых, имеется изоморфизм $R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, N) \cong N \otimes_A^L M^\vee$. Далее,

$$(2)\quad R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathsf{k}}(R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, N), \mathsf{k}) \cong R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathsf{k}}(N \otimes_A^L M^\vee, \mathsf{k}) \cong R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(N, R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathsf{k}}(M^\vee, \mathsf{k})) = \\ = R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(N, M^{\vee *}),$$

где второй изоморфизм — сопряжённость $R\,\underline{\mathrm{Hom}}$ и $\otimes^L$, а третий — определение $*$. Переходя в (2) к H^0, получим справа $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}-A)}(N, M^{\vee *})$, а слева (так как $*$ — точный функтор)

$$H^0(R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathsf{k}}(R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, N), \mathsf{k})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{k}}(H^0(R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, N)), \mathsf{k}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathrm{Mod}-A)}(M, N)^*.$$

□

Доказательство теоремы 3. Так как $\mathrm{gldim}(A) < \infty$, имеем $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}A) = \mathrm{Perf}(A)$, аналогично для A^{op}. Следовательно, функторы $\vee$ и $*$ суть взаимно обратные эквивалентности между $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}A)$ и $\mathcal{D}^b(A{-}\mathrm{mod})$, а их композиция — автоэквивалентность $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}A)$. Теперь из предложения 4 следует, что функтор $M \mapsto M^{\vee *}$ — функтор Серра на $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}A)$.

Чтобы показать второй изоморфизм $M^{\vee *} \cong M \otimes_A^L A^*$, достаточно показать, что $M^\vee \cong (M \otimes_A^L A^*)^*$. Действительно,

$$(M \otimes_A^L A^*)^* \cong R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathsf{k}}(M \otimes_A^L A^*, \mathsf{k}) \cong R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathsf{k}}(A^*, \mathsf{k})) \cong R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, A) = M^\vee.$$

□

Задача 1. В предположении теоремы 3 покажите, что обратный к функтору Серра задаётся формулой

$$S^{-1}(M) \cong M \otimes_A^L R\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(A^*, A).$$

Следствие 5. *Пусть $A = \mathsf{k}\Gamma/I$ — алгебра путей в колчане с допустимыми соотношениями. Тогда $S(P_i) \cong I_i$ (где P_i и I_i — неразложимые проективные и инъективные модули).*

Задача 2. Пусть A — конечномерная алгебра. Тогда категория $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}A)$ имеет функтор Серра титтк $\mathrm{gldim}(A) < \infty$.

Задача 3. Пусть $\mathcal{T}$ — триангулированная категория с функтором Серра, $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ — триангулированная подкатегория. Тогда любые два из следующих условий влекут третье:

- $\mathcal{A}$ допустима слева в $\mathcal{T}$,
- $\mathcal{A}$ допустима справа в $\mathcal{T}$,
- на $\mathcal{A}$ есть функтор Серра.

Лемма 6. *Функтор Серра коммутирует с любыми эквивалентностями. Т.е., пусть $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ — триангулированные категории с функторами Серра, $F\colon \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ — эквивалентность. Тогда $S_2F \cong FS_1$.*

Доказательство. Почти очевидно, следует из единственности функтора Серра. □

Следствие 7. *Пусть v — источник в колчане Γ, а $\Phi_v^+ \colon \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\sigma_v^+\Gamma)$ — функтор отражения. Тогда при $i \neq v$ имеем*

$$\Phi_v^+(I_i) \cong I_i.$$

Доказательство. Следует из леммы 6, следствия 5 и того, что $\Phi_v^+(P_i) \cong P_i$. □

Наконец, нам пригодится

Лемма 8. *Пусть $\mathcal{T}$ — триангулировнная категория с функтором Серра, $E \in \mathcal{T}$ — исключительный объект. Пусть ортогоналы ${}^\perp E$ и $E^\perp$ допустимы в $\mathcal{T}$. Тогда имеем*

$$L_{E^\perp}(E) \cong S(E), \quad R_{{}^\perp E}(E) \cong S^{-1}(E).$$

Доказательство. Проверим первое утверждение, второе проверяется аналогично. Имеются полуортогональные разложения

$$\mathcal{T} = \langle E^\perp, E \rangle = \langle E^{\perp\perp}, E^\perp \rangle.$$

По определению функтора Серра имеем

$$(3)\quad \mathrm{Hom}^i(E, S(E)) = \mathrm{Hom}(E[-i], S(E)) \cong \mathrm{Hom}(E, E[-i])^* = \mathrm{Hom}^{-i}(E, E)^* = \begin{cases} \mathsf{k}, & i = 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

В частности, имеется выделенный морфизм $f \colon E \to S(E)$. Дополним его до выделенного треугольника

$$C \to E \xrightarrow{f} S(E) \to C[1].$$

Покажем, что $S(E) \in E^{\perp\perp}$ и $C \in E^\perp$, отсюда будет следовать, что $L_{E^\perp}(E) \cong S(E)$.

Действительно, пусть $X \in E^\perp$. Тогда $\mathrm{Hom}^i(X, S(E)) \cong \mathrm{Hom}^{-i}(E, X)^* = 0$, значит $S(E) \in E^{\perp\perp}$. Далее, из (3) видно, что f индуцирует изоморфизмы на $\mathrm{Hom}^i(E, -)$ при всех i, и значит $\mathrm{Hom}^i(E, C) = 0$, т.е. $C \in E^\perp$. □

Вернёмся к функторам отражений.

Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — $+$-допустимая последовательность вершин колчана Γ, причём каждая вершина в ней встречается ровно один раз. Несложно видеть, что такие последовательности существуют! Тогда колчан $\Gamma' := \sigma_{v_n}^+ \ldots \sigma_{v_1}^+ \Gamma$ изоморфен Γ: у каждой стрелки направление поменялось ровно два раза.

Предложение 9. *В сделанных обозначениях композиция*

$$\Phi^+ := \Phi_{v_m}^+ \circ \ldots \circ \Phi_{v_1}^+ \colon \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma)$$

не зависит от выбора такой последовательности и изоморфна функтору $S[-1]$.

Доказательство. Из описания функторов отражения с прошлой лекции следует, что композиция требуемых отражений устроена следующим образом. Пусть $\mathcal{E}_{v_i}, i = 1, \ldots, n$ — сильный полный исключительный набор в некоторой категории вида $\mathcal{D}^b(\mathrm{Mod}{-}A)$, для которого $\mathrm{End}(\oplus \mathcal{E}_{v_i}) \cong \mathsf{k}\Gamma$. Перестроим последовательно все объекты этого набора вправо через все остальные, получим новый сильный исключительный набор $\mathcal{E}'_{v_i}$ с такой же алгеброй эндоморфизмов. При этом $\mathcal{E}'_{v_i} = R_{{}^\perp\mathcal{E}_{v_i}}(\mathcal{E}_{v_i})[1] \cong S^{-1}(\mathcal{E}_{v_i})[1]$ по лемме 8. Положим

$\mathcal{E} = \oplus\mathcal{E}_{v_i}$, $\mathcal{E}' = \oplus\mathcal{E}'_{v_i} \cong S^{-1}(\mathcal{E})[1]$. Имеем две эквивалентности $\langle\mathcal{E}_u\rangle \to \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma)$, заданные функторами $\alpha = R\operatorname{Hom}(\mathcal{E}, -)$ и $\alpha' = R\operatorname{Hom}(\mathcal{E}', -)$, и композиция отражений Φ^+ есть $\alpha'\alpha^{-1}$.

Нам надо показать, что $\alpha' \cong S[-1] \circ \alpha$. Действительно,

$$\alpha'(X) = R\operatorname{Hom}(\mathcal{E}', X) \cong R\operatorname{Hom}(S^{-1}(\mathcal{E})[1], X) \cong R\operatorname{Hom}(\mathcal{E}, S(X)[-1]) = \alpha(S(X)[-1]) \cong S(\alpha(X))[-1],$$

где последний изоморфизм следует из леммы 6. □

Таким образом, композиция правых отражений относительно всех вершин в колчане имеет ясный категорный смысл — это функтор Серра со сдвигом. Будем обозначать её, как выше, через Φ^+, и аналогично через Φ^- будем обозначать обратный функтор, композицию левых отражений. Выясним, как этот функтор действует на неразложимые модули. Для краткости, будем обозначать

$$\mathrm{Ind}(\mathsf{k}\Gamma) := \mathrm{Ind}(\mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma).$$

Предложение 10. *Пусть $M \in \mathrm{Ind}(\mathsf{k}\Gamma)$, тогда*

$$\begin{cases} \Phi^+(M) \cong I_i[-1] & \textit{при} \quad M \cong P_i, \quad i \in \Gamma_0, \\ \Phi^+(M) \in \mathrm{Ind}(\mathsf{k}\Gamma) & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Мы знаем, как действуют отдельные отражения на проективные и инъективные неразложимые модули, отсюда следует первое утверждение. Второе следует из того, что $+$-нерегулярных относительно последовательности $v_1, \ldots, v_n$ модулей не более n, а n мы уже предъявили, это P_i, $i \in \Gamma_0$. □

Аналогично имеем:

Предложение 11. *Пусть $M \in \mathrm{Ind}(\mathsf{k}\Gamma)$, тогда*

$$\begin{cases} \Phi^-(M) \cong P_i[1] & \textit{при} \quad M \cong I_i, \quad i \in \Gamma_0, \\ \Phi^-(M) \in \mathrm{Ind}(\mathsf{k}\Gamma) & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Определение 12. Скажем, что неразложмый $\mathsf{k}\Gamma$-модуль *$+$-регулярен*, если он $+$-регулярен относительно любой $+$-допустимой последовательности вершин Γ. Аналогично определяются $-$-регулярные модули.

Предложение 13. *Неразложимый $\mathsf{k}\Gamma$-модуль M является $+$-регулярным титтк $(\Phi^+)^k \in \mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma$ при всех $k \geqslant 0$.*

Доказательство. Часть "только тогда" очевидна, проверим следствие "тогда". Надо показать, что если для некоторой $+$-допустимой последовательности $u_1, \ldots, u_m$ функтор $\Phi^+_{u_m} \circ \ldots \Phi^+_{u_1}$ переводит M в ненулевой сдвиг модуля, то то же делает и некоторая степень функтора Φ^+. Функтор $(\Phi^+)^k$ — это композиция отражений, соответствующих $+$-допустимой последовательности $v_1, \ldots, v_n, v_1, \ldots, v_n, \ldots, v_1, \ldots, v_n$ (k одинаковых фрагментов, в каждом все вершины колчана встречаются ровно по разу). Приходим к следующему утверждению: последовательность $u_1, \ldots, u_m$ можно дополнить дописыванием справа вершин до $+$-допустимой последовательности вида $v_1, \ldots, v_n, v_1, \ldots, v_n, \ldots, v_1, \ldots, v_n$. Это утверждение верно не буквально, а с точностью до перестановки идущих подряд вершин, не связанных ребром (для таких вершин отражения коммутируют). Мы оставляем проверку слушателю. □

Аналогично имеем

Предложение 14. *Неразложимый* $\mathsf{k}\Gamma$*-модуль* M *является* $-$*-регулярным титтк* $(\Phi^-)^k \in \mathrm{mod}{-}\mathsf{k}\Gamma$ *при всех* $k \geqslant 0$.

Определение 15. Неразложимый $\mathsf{k}\Gamma$-модуль M называется *регулярным*, если он $+$-регулярен и $-$-регулярен.

Предложение 16. *Пусть* $M \in \mathrm{Ind}(\mathsf{k}\Gamma)$. *Модуль* M *не* $+$*-регулярен титтк* $M \cong (\Phi^-)^k(P_i)$ *при некоторых* $k \geqslant 0$ *и* $i \in \Gamma_0$. *Модуль* M *не* $-$*-регулярен титтк* $M \cong (\Phi^+)^k(I_i)$ *при некоторых* $k \geqslant 0$ *и* $i \in \Gamma_0$.

Доказательство. Первое утверждение легко следует из предложений 10 и 13, второе — из их аналогов для Φ^-. □

Таким образом, нерегулярные модули явно конструируются. Основную массу неразложимых модулей составляют регулярные.

Для дальнейшего анализа функторов отражения нам понадобятся группы Гротендика.

Определение 17. Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория. Её группа Гротендика $K_0(\mathcal{A})$ определятся как абелева группа, порождённая классами изоморфизма объектов в $\mathcal{A}$ (класс X обозначается $[X]$) и следующими соотношениями: для каждой точной тройки $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ имеем соотношение $[Y] = [X] + [Z]$.

Определение 18. Пусть $\mathcal{T}$ — триангулированная категория. Её группа Гротендика $K_0(\mathcal{T})$ определятся как абелева группа, порождённая классами изоморфизма объектов в $\mathcal{T}$ и следующими соотношениями: для каждого выделенного треугольника $X \to Y \to Z \to X[1]$ имеем соотношение $[Y] = [X] + [Z]$, и для каждого X соотношение $[X[1]] = -[X]$.

Предложение 19. *Для любой абелевой категории* $\mathcal{A}$ *группы* $K_0(\mathcal{A})$ *и* $K_0(\mathcal{D}^b(\mathcal{A}))$ *изоморфны.*

Доказательство. Определим гомоморфизм $K_0(\mathcal{A}) \to K_0(\mathcal{D}^b(\mathcal{A}))$ правилом $[X] \mapsto [X]$. Определим гомоморфизм $K_0(\mathcal{D}^b(\mathcal{A})) \to K_0(\mathcal{A})$ правилом $[X] \mapsto \sum_i (-1)^i [H^i(X)]$. Необходимо проверить корректность этих определений (т.е. то, что определяющие группы K_0 соотношения переходят в ноль), а также то, что эти отображения взаимно обратны. Мы оставляем проверку слушателю. □

Главный для нас пример — следующий.

Предложение 20. *Пусть* A *— конечномерная алгебра. Тогда* $\mathrm{K}_0(\mathrm{mod}{-}A)$ *свободно порождена классами изоморфизма простых модулей.*

Доказательство. Следует из теоремы Жордана-Гёльдера. □

В случае, когда алгебра A — это алгебра путей в колчане с допустимыми соотношениями, изоморфизм $K_0(\mathrm{mod}{-}A) \to \mathbb{Z}^{|\Gamma_0|}$ устанавливается вектором размерности: $[M] \mapsto \underline{\dim}(M)$. (Напомним, для представления колчана $M = (M_i)_{i \in \Gamma_0}$ его вектор размерности $\underline{\dim}(M)$ есть набор чисел $(\dim(M_i))_{i \in \Gamma_0}$.)

Всякий точный функтор $F\colon \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ между триангулированными категориями определяет гомоморфизм

$$K_0(F)\colon K_0(\mathcal{T}_1) \to K_0(\mathcal{T}_2) \tag{4}$$

по правилу $[X] \mapsto [F(X)]$.

Задача 4. Пусть дано полуортогональное разложение $\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$. Тогда имеется изоморфизм

$$K_0(\mathcal{T}) \cong K_0(\mathcal{A}) \oplus K_0(\mathcal{B}).$$

Следствие 21. *Пусть $(E_1, \ldots, E_n)$ — полный исключительный набор в триангулированной категории $\mathcal{T}$. Тогда $K_0(\mathcal{T}) \cong \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z} \cdot [E_i]$.*

Доказательство. Следует из задачи 4 и того, что $K_0(\langle E \rangle) \cong K_0(\mathcal{D}^b(\mathrm{mod{-}k})) \cong \mathbb{Z}$. □

Группа Гротендика становится особенно интересным инвариантом категории, если на ней ввести форму Эйлера.

Определение 22. Пусть $\mathcal{T}$ — Ext-конечная триангулированная категория. Определим билинейную форму Эйлера на $K_0(\mathcal{T})$ равенством

$$\langle [X], [Y] \rangle := \sum_i (-1)^i \dim \operatorname{Hom}^i(X, Y).$$

Корректность определения следует из существования длинных точных последовательностей групп Hom^i, связанных с выделенным треугольником.

Форма Эйлера, как правило, не симметричная и не кососимметричная. Мерой её несимметричности служит “оператор Серра” $K_0(S)$ (см. (4)), которым функтор Серра действует на K_0. Отметим также, что любая точная автоэквивалентность $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ действует на $K_0(\mathcal{T})$ оператором, сохраняющим форму Эйлера.

Замечание 23. В задаче 4 прямая сумма является полуортогональной относительно формы Эйлера.

Замечание 24. Класс исключительного объекта $E \in \mathcal{T}$ в $K_0(\mathcal{T})$ “имеет квадрат 1”: $\langle [E], [E] \rangle = 1$. Классы объектов полного исключительного набора $(E_1, \ldots, E_n)$ образуют “полуортонормальный базис”, т.е. $\langle [E_j], [E_i] \rangle = 0$ при $i < j$.

Пример 25. Пусть $A = \mathsf{k}\Gamma/I$ — алгебра путей в колчане с допустимыми соотношениями. Напомним обозначение $A_{ij} := e_i A e_j \subset A$, где $i, j \in \Gamma_0$. Положим $a_{ij} = \dim A_{ij}$. Тогда

$$\langle [P_i], [P_j] \rangle = a_{ji}.$$

Действительно, $\langle [P_i], [P_j] \rangle = \dim \operatorname{Hom}(P_i, P_j) = \dim A_{ji} = a_{ji}$. Отметим, что для упорядоченного колчана (так, что стрелки идут только слева направо) матрица (a_{ij}) нижнетреугольная с единицами на диагонали.

Задача 5. Пусть $A = \mathsf{k}\Gamma/I$ — алгебра путей в упорядоченном колчане с допустимыми соотношениями. Выразите матрицу оператора Серра $K_0(S)$ в базисе из классов простых модулей через матрицу (a_{ij}).