

## Когомологии де Рама

▷ Это необязательных листок для людей, знакомых с началами анализа на многообразиях. Везде далее  $M$  — гладкое многообразие,  $H_{dR}$  — когомологии де Рама.

**Задача 9А.1.** Приведите явный пример а) замкнутой неточной 1-формы на  $S^1$ ; б) замкнутой неточной 2-формы на  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

**Задача 9А.2.** Вычислите когомологии де Рама  $n$ -мерного тора.

**Задача 9А.3.** Докажите, что  $H_{dR}^0(M) \cong \mathbb{R}^{\pi_0(M)}$ .

**Задача 9А.4.** а) Докажите, что если  $M$  односвязно, то  $H_{dR}^1(M) = 0$ .

б) Постройте инъективное отображение  $H_{dR}^1(M) \rightarrow \text{Hom}(H_1(M), \mathbb{R})$ .

(Указание: любой путь можно аппроксимировать гладким, а близкие пути гомотопны.)

▷ Это отображение является изоморфизмом. И вообще  $H_{dR}^\bullet(M) \cong \text{Hom}(H_\bullet(M), \mathbb{R}) = H^\bullet(M; \mathbb{R})$ .

**Задача 9А.5.** Постройте длинную точную последовательность Майера-Вьеториса когомологий де Рама для покрытия многообразия двумя открытыми подмножествами.

**Задача 9А.6.** Вычислите когомологии де Рама сферы  $S^n$ .

**Задача 9А.7.** Докажите, что конечнолистное накрытие  $\pi: M \rightarrow N$  индуцирует вложение когомологий  $\pi^*: H_{dR}^\bullet(N) \rightarrow H_{dR}^\bullet(M)$ .