Лекция 6

Суммы степеней и числа Бернулли

3.11.2021

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}.$$

Вопрос: $S_k(n):=1^k+2^k+\ldots+n^k=?$

Теорема. (а) $S_k(n)$ есть многочлен от n степ. $k+1$.

(б) $S_k(n)=\frac{n^{k+1}}{k+1}+\frac{n^k}{2}+\ldots$ $\quad S_k(0)=0,\ S_k(1)=1$

Д-во. Предп., что мы нашли мн-н

$$S_k(n)=\sum_{j=1}^{n} j^k$$

$$S_k(n)-S_k(n-1)=n^k.$$

$$S_k(x)=a_{k+1}x^{k+1}+a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\ldots+a_1x.$$

$$S_k(x-1)=a_{k+1}(x-1)^{k+1}+a_k(x-1)^k+\ldots+a_1(x-1)$$

$$S_k(x)-S_k(x-1)=x^k$$

$$(x-1)^{k+1}=x^{k+1}-(k+1)x^k+\frac{(k+1)k}{2}x^{k-1}+\ldots$$

x^{k+1}: $\quad \cancel{a_{k+1}}-\cancel{a_{k+1}}=0$

x^k: $\quad \cancel{a_k}+(k+1)a_{k+1}-\cancel{a_k}=1$

x^{k-1}: $\quad -a_{k+1}\cdot\frac{k(k+1)}{2}+a_k\cdot k=0.$ ←

$$a_{k+1}=\frac{1}{k+1}.$$

$$a_k=a_{k+1}\cdot\frac{k+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

x^{k+1-j}: $\quad a_{k+1}\binom{k+1}{j} - a_k\binom{k}{j-1} + a_{k-1}\binom{k-1}{j-2} + \ldots$

$$+\ldots + (-1)^i\binom{k+1-i}{j-i} a_{k+1-i} + \ldots + (-1)^j a_{k+1-j}(k+1-j) = 0$$

Это с-ма уравнений на $a_{k+1}, a_k, a_{k-1}, \ldots a_1$.

Мы доказали, что сущ ед. мн-н $S_k(x)$ с такими св-вами.

Упр. Найдите явные формулы для $S_4(n)$, $S_5(n)$.

$$\sum_{j=1}^{n} j^k \approx \int_0^n x^k dx = \frac{n^{k+1}}{k+1}.$$

Упр. Посчитайте $\int_0^n x^k dx$ по методу трапеций (разбив на единичные отрезки).

Ответ: $\frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2}$.

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{\int_0^x t^k dt}_{\substack{\wr\wr \\ S_k(x)}}\Big) = x^k = k\cdot\Big(\underbrace{\frac{x^k}{k}}_{\sim k\cdot S_{k-1}(x)}\Big)$$

$$\frac{d}{dx} S_3(x) = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}\right) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2} =$$

$$= 3\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}\right) = 3\, S_2(x).$$

$$\frac{d}{dx} S_2(x) = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}\right)' = x^2 + x + \frac{1}{6} = 2\, S_1(x) + \frac{1}{6}$$

Предл. $(S_k(x))' = k\cdot S_{k-1}(x) + B_k^*$.

Д-во. $D,\ \Delta,\ \Sigma$ — опер на мн-нах.

$$D\,P(x) = P'(x).$$

$$\Delta\, P(x) = P(x) - P(x-1).$$

уменьшают $\deg P(x)$ на 1.

$$\left(\Sigma\, P\right)(n) = P(1) + P(2) + \ldots + P(n).$$

$$\Sigma:\ x^k \mapsto S_k(x).$$ ← увел. $\deg P$ на 1.

$$\Delta\Sigma = I$$ — тожд. оператор

$$\Delta D = D\Delta \qquad \left(f(x) - f(x-1)\right)' = f'(x) - f'(x-1)$$

$$\Delta P \equiv 0 \iff P = \mathrm{const}.$$

Хотим д-ть: $S_k(x)' = k\cdot S_{k-1}(x) + \mathrm{const}.$

Докажем, что $\Delta\left(S_k(x)'\right) = \Delta\left(k\cdot S_{k-1}(x)\right)$

$$\Delta D \Sigma(x^k) = D\Delta\Sigma(x^k) = D(x^k) = k\cdot x^{k-1} =$$

$$= (\Delta\Sigma)(k\,x^{k-1}) = k\cdot\Delta\left(\Sigma\, x^{k-1}\right) = k\,\Delta\left(S_{k-1}\right) \qquad \blacksquare$$

Предл. Коэффициент при n^{k+1-i} в $S_k(n)$ имеет вид $B_i^*\dfrac{k(k-1)\ldots(k+2-i)}{i!}$

Эквивалентно:

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}n^{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \ldots + B_i\frac{k(k-1)\ldots(k+2-i)}{i!}n^{k+1-i} + \ldots + B_k^*\,n.$$

Д-во: упр. на дифференцирование.

Можно находить коэф-ты $S_k(x)$, пользуясь этим соотн-ем и усл-ем $S_k(1)=1$.

Пример: $S_4(x)$.

$$S_4(x)' = 4S_3(x) + B_4^*. \qquad S_3(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}$$

$$S_4(x)' = x^4 + 2x^3 + x^2 + B_4^*.$$

$$S_4(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + B_4^* x. \qquad 1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + B_4^*.$$

$$\frac{30}{30} = \frac{6}{30} + \frac{15}{30} + \frac{10}{30} + B_4^*$$

$$S_4(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30}. \qquad B_4^* = -\frac{1}{30}$$

$$S_5(x)' = x^5 + \frac{5x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \frac{x}{6} + B_5^*.$$

$$S_5(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{12} - \frac{x^2}{12} + B_5^* x \qquad S_5(1) = 1.$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{5}{12} - \frac{1}{12} + B_5^* = 1$$

$$B_5^* = 0.$$

Опр.: Числа Бернулли: $B_1 = -B_1^* = -\frac{1}{2}$

$B_k = B_k^*, \ k > 1.$

$$S_k(n-1) = S_k(n) - n^k = \frac{n^{k+1}}{k+1} - \frac{n^k}{2} + \ldots + B_i \frac{k(k-1)\ldots(k+2-i)}{i!} n^{k+1-i} + \ldots + B_k n.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$

$$\frac{k(k-1)\dots(k+2-i)}{i!} = \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{i}$$

$$S_k(n-1) = \frac{1}{k+1}\Big(n^k + (k+1)B_1 n^k + \dots + \binom{k+1}{i} B_i n^{k+1-i} + \dots + B_k n\Big).$$

$$B_k \mapsto B^k$$

$$S_k(n-1) = \frac{1}{k+1}\Big(n^{k+1} + (k+1)B^1 n^k + \dots + \binom{k+1}{i} B^i n^{k+1-i} + \dots + (k+1)B^k n + B^{k+1} - B^{k+1}\Big) =$$

$$\text{"}=\text{"}\ \frac{1}{k+1}\Big((n+B)^{k+1} - B^{k+1}\Big).$$

$n=1$: $\quad (B+1)^{k+1} - B^{k+1} = 0$

$$\boxed{B_k = -\sum_{i<k}\binom{k+1}{i}\frac{B_i}{k+1}.}$$

Упр. Д-ть формулу Эйлера-Маклорена: $\quad f(x)$ - мн-н

$$f(x) = F'(x)$$

$$f(0) + f(1) + \dots + f(n-1) = F(B+n) - F(B) = \int_0^n f(x+B)\,dx.$$

$$f(n) = q^n \qquad F(n) = \frac{q^n}{\ln q}.$$

$$f(0)+f(1)+\dots+f(n-1) = 1+q+q^2+\dots+q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{q^{B+n}-q^B}{\ln q} = q^B\,\frac{q^n-1}{\ln q}$$

$$\frac{1}{q-1} = \frac{q^B}{\ln q} \qquad q^B = \frac{\ln q}{q-1} \qquad q = e^s.$$

$$e^{sB} = \frac{s}{e^s - 1} \qquad e^{sB} = \sum_{k \geq 0} \frac{s^k \cdot B_k}{k!}$$

Теор. $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{B_k s^k}{k!} = \frac{s}{e^s - 1}$ ← ряд Тодда

экспоненциальная произв. ф-ция

Д-во. $\displaystyle\left(\sum \frac{B_k s^k}{k!}\right)\left(s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3!} + \dots\right) = s.$

$$s^{k+1}: \quad \frac{B_k}{k!} + \frac{B_{k-1}}{(k-1)!\,2!} + \frac{B_{k-2}}{(k-2)!\,3!} + \dots + \frac{B_0}{(k+1)!} = 0. \qquad k > 0.$$

$(k+1)!$

$$(k+1) B_k + B_{k-1} \frac{(k+1)!}{(k-1)!\,2!} + \dots + B_{k-i} \underbrace{\frac{(k+1)!}{(k-i)!\,(i+1)!}}_{=\binom{k+1}{k-i}} + \dots + B_0 = 0.$$

$$B_k = -\sum_{0 \leq i \leq k-1} \binom{k+1}{k-i} \frac{B_{k-i}}{k+1} = -\sum_{i<k} \binom{k+1}{i} \frac{B_i}{k+1}.$$

Теор. $B_k = 0$ при $k = 2m+1$, $k > 1$.

Д-во: $\dfrac{s}{e^s - 1} + \dfrac{s}{2}$ ← треб. д-ть, что этот ряд имеет нулевые неч. к-ты, т.е. явл. четной ф-цией.

$$\frac{s}{e^s-1}+\frac{s}{2}=\frac{s}{2}\left(\frac{2}{e^s-1}+\frac{e^s-1}{e^s-1}\right)=$$

$$=\frac{s}{2}\left(\frac{e^s+1}{e^s-1}\right)=\frac{s}{2}\left(\frac{e^{s/2}+e^{-s/2}}{e^{s/2}-e^{-s/2}}\right)=\frac{\operatorname{ch} s/2}{\operatorname{sh} s/2}\cdot\frac{s}{2}$$

$$=\frac{s}{2}\operatorname{cth}\frac{s}{2}.\ \leftarrow \text{четно}$$

$$s\operatorname{cth} s=\frac{2s}{e^{2s}-1}+\frac{2s}{2}=\sum_{n\geq 0} B_{2n}\frac{(2s)^{2n}}{(2n)!}=$$

$$=\sum_{n\geq 0} 4^n B_{2n}\cdot\frac{s^{2n}}{(2n)!}$$

Теневое исчисление

umbral calculus