Обыкновенные дифференциальные уравнения 2021, конспект. Пушкарь П.Е.

Первая лекция, 8 сентября

Наши главные герои это векторные поля и фазовые потоки. Для того, чтобы говорить о них нам понадобятся более простые вещи. Мы начнем с определения касательного вектора. Всегда, если не оговорено что-нибудь еще мы живем в "маленьком кусочке" (открытое множество) пространства $\mathbb{R}^n$. Сейчас мы определим касательное пространство к $\mathbb{R}^n$ в точке $a \in \mathbb{R}^n$.

Касательный вектор

Определим "путь с центром в точке a" как дифференцируемое отображение

$$\gamma \colon]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n, \gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t)),$$

и $\gamma(0) = a$. Тут γ_i это дифференцируемые функции на интервале $]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Пути с центром в $a \in \mathbb{R}^n$ образуют векторное пространство над $\mathbb{R}$, сейчас мы научимся их складывать и умножать на числа. Сумма двух путей γ_1 и γ_2 это путь γ_3, такой что

$$\gamma_3(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) - a.$$

Произведение числа λ на путь γ это путь, значение которого в точке $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ равно

$$\lambda\gamma(t) - \lambda a + a.$$

Проверьте, что пути с центром в a образуют векторное пространство V_a. Это пространство бесконечномерно даже при $n = 1$ (почему)? Сейчас мы его уменьшим.

Напомню, что говорят, что $f(t) = o(t)$ при $t \to 0$ для функции f на проколотом в нуле интервале $]-\delta, \delta[\subset \mathbb{R}$, если

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = 0.$$

Скажем, что два пути γ_1 и γ_2 с центром в точке a эквивалентны, если
$$\gamma_1(t) - \gamma_2(t) = o(t),$$
при $t \to 0$. Это можно понимать как $\sqrt{\sum(\gamma_{1,i}(t) - \gamma_{2,i}(t))^2} = o(t)$ при $t \to 0$ или как $\gamma_{1,i}(t) - \gamma_{2,i}(t) = o(t)$ при $t \to 0$ и всех $i \in \{1, ..., n\}$ или как $\max |\gamma_{1,i}(t) - \gamma_{2,i}(t)| = o(t)$ при $t \to 0$ (или как-нибудь еще). Докажите, что эти способы эквивалентны. Класс эквивалентности пути γ мы обозначим через $[\gamma]$. Такой класс эквивалентности называется касательным вектором.

Для гладкой кривой γ для каждого t эта кривая определяет касательный вектор $\dot\gamma(t)$, лежащий в касательном пространстве $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n$, которое мы сейчас опишем.

Касательное пространство

Введите на классах эквивалентности путей (с центром в a) структуру векторного пространства. Это пространство называется касательным пространством к $\mathbb{R}^n$ в точке a и обозначается $T_a\mathbb{R}^n$.

Для открытого подмножества U и $a \in U$ также определяется касательное пространство T_aU, естественно изоморфное пространству $T_a\mathbb{R}^n$.

Дальнейшие утверждения следует воспринимать как задачи.

Касательное пространство $T_a\mathbb{R}^n$ конечномерно, его размерность равна n. Более того, оно снабжено базисом, i-й вектор которого есть класс эквивалентности пути
$$\gamma_i(t) = (a_1, ..., a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, ..., a_n),$$
двигающемуся вдоль i-й координаты. Этот вектор (не очень корректно) обозначают $\frac{\partial}{\partial x_i}$, правильней было бы $\frac{\partial}{\partial x_i}(a)$.

Укажем изоморфизм $T_a\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n$: сопоставим касательному вектору $v \in T_a\mathbb{R}^n$ следующий вектор – возьмем представляющий v путь
$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$$
и сопоставим v вектор $(\gamma_1'(0), ..., \gamma_n'(0))$. Это и есть разложение v по базису.

Касательное отображение

Докажите, что при гладком отображении F открытого подмножества $U \subset \mathbb{R}^n$ в открытое подмножество $V \subset \mathbb{R}^k$ эквивалентные пути с центром в a переходят в эквивалентные пути с центром в $F(a)$ и соответствующее отображение касательных пространств $T_a\mathbb{R}^n$ в $T_{F(a)}\mathbb{R}^k$ линейно. Это отображение называется производной или касательным отображением или дифференциалом отображения F в точке a и обозначается разными способами – $dF|_a$, $F'(a)$, $F_*(a)$..

Найти матрицу дифференциала отображения $F = (f_1, .., f_k)$ (f_i – функция) в базисах $\frac{\partial}{\partial x_1}, .., \frac{\partial}{\partial x_n}$ пространства $T_a\mathbb{R}^n$ и $\frac{\partial}{\partial y_1}, .., \frac{\partial}{\partial y_k}$ пространства $T_{F(a)}\mathbb{R}^k$. Эта матрица часто называется матрицей Якоби.

Диффеоморфизмы

Мы переходим к понятию диффеоморфизма. Гладкое (тут возможны варианты, и чаще всего я буду говорить о бесконечной гладкости) отображение между открытыми множествами $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^m$

$$F\colon U \to V$$

называется диффеоморфизмом, если есть обратное отображение F^{-1} и оно тоже гладкое. Докажите, что если диффеоморфизм между непустыми открытыми подмножествами векторных пространств существует, то размерности этих пространств равны: $m = n$.

Отображение F назовем локальным диффеоморфизмом в точке a, если найдется такая окрестность U точки a, что отображение ограничения $F|_U$ есть диффеоморфизм на образ,

$$F|_U\colon U \to F(U).$$

Вопрос – является ли отображение диффеоморфизмом может быть очень трудным. В отличие от этого вопрос, является ли отображение локальным диффеоморфизмом гораздо проще. Ответ на него дает знаменитая теорема об обратном отображении, сводящая дело к линейной алгебре.

Теорема об обратном отображении

Гладкое отображение $F\colon U \to V$ является локальным диффеоморфизмом в точке $a \in U$ если и только если его дифференциал

$$dF|_a\colon T_aU \to T_{F(a)}V$$

является изоморфизмом.

Это и есть теорема об обратной функции (обратном отображении), которую мы будем не раз использовать. Диффеоморфизм является локальным диффеоморфизмом в каждой точке области определения, а вот обратное вообще говоря неверно (приведите пример).

Дифференцирование функции вдоль касательного вектора

Если f гладкая функция (в окрестности точки a) и $v \in T_a\mathbb{R}^n$ касательный вектор, то можно продифференцировать f вдоль v. Для этого надо взять какой-нибудь путь γ, представляющий вектор v (т.е. $v = [\gamma]$), и вычислить число

$$\left.\frac{f(\gamma(t))}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

Это число не зависит от выбора представляющего пути γ (докажите), обозначается $L_v f$ и называется производной (или даже производной Ли в честь Софуса Ли) функции f вдоль вектора v.

Докажите, что для вектора $v = b_1\frac{\partial}{\partial x_1} + .. + b_n\frac{\partial}{\partial x_n}$ производная $L_v f$ равна

$$b_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + .. + b_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(a).$$

Векторные поля

Гладкое векторное поле v на $U \subset \mathbb{R}^n$ это касательный вектор $v(x)$ в каждой точке множества U, гладко зависящий от точки x. Остается определить, что значит "гладко зависящий от точки". Это можно определить координатным способом, сказав, что функции v_i из разложения

$$v = v_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + ... + v_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

являются гладкими. А можно менее координатно, сказав, что функция $L_v f$ гладкая, для любой гладкой функции f. Множество всех векторных полей на U часто обозначают через $Vect(U)$. Векторные поля можно складывать и умножать на функции – они образуют модуль над кольцом функций.

Касательное отображение переводит касательный вектор в касательный вектор, но из векторного поля вообще говоря не получается векторного поля (у точки может быть много прообразов или не быть ни одного). Но если отображение F диффеоморфизм, то векторы $F_*v(x)$ это векторы из векторного поля, которое естественно и обозначить через F_*v.

Опишем другой подход к касательному вектору и векторному полю. Назовем дифференцированием в точке $a \in U$ линейный функционал D на пространстве гладких функций на U, удовлетворяющий тождеству Лейбница

$$D(fg) = f(a)D(g) + D(f)g(a).$$

Дифференцирования суть касательные векторы – для любого дифференцирования D найдется единственный касательный вектор $v(a) \in T_aU$, что $D = L_{v(a)}$.

Векторному полю v соответствует оператор L_v на пространстве гладких функций. Замечательно, что коммутатор таких операторов есть снова оператор такого вида (докажите), то есть найдется единственное векторное поле v_3, что

$$L_{v_3} = L_{v_1}L_{v_2} - L_{v_2}L_{v_1}$$

(все дифференцирования второго порядка сократятся). Это поле v_3 называется коммутатором (или скобкой Ли) векторных полей v_1 и v_2 и обозначается $[v_1, v_2]$. Про его геометрический смысл мы поговорим позже.

Теорема о выпрямлении

Оказывается, что если гладкое векторное поле v не обращается в ноль, то локально оно "выпрямляется" диффеоморфизмом, то есть у точки x_0, такой что $v(x_0) \neq 0$ есть такая окрестность U и ее диффеоморфизм F, что

$$F_*v = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Это основная теорема нашего курса, называется она – теорема о выпрямлении, мы докажем ее позже.

Вторая лекция, 16 сентября

Автономное обыкновенное дифференциальное уравнение

Пусть U открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, дальше я буду называть его фазовым пространством и обозначать буквой M. Пусть $v \in Vect(M)$. С этим векторным полем однозначно связано дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x),$$

которое называется *автономным* (то есть независимым от времени) *обыкновенным дифференциальным* уравнением. Иногда его записывают как систему уравнений, например на плоскости с координатами (x_1, x_2) для векторного поля

$$v_1(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + v_2(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

получится система из двух уравнений

$$\dot{x}_1 = v_1(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2 = v_2(x_1, x_2).$$

Решения дифференциального уравнения

Решением нашего дифференциального уравнения называется отображение $\varphi\colon]a, b[\to U$, такое что

$$\varphi_*(t)(\frac{\partial}{\partial t}) = v(\varphi(t)).$$

Это равносильно тому, что $\frac{d}{dt}\varphi(t) = v(\varphi(t))$. Интервал может быть как конечный, так и бесконечный – возможны значения $a = -\infty$, $b = +\infty$. Это же условие, расписанное чуть подробнее на плоскости дает для $\varphi(t) = (x_1(t), x_2(t))$ равенства

$$x_1'(t) = v_1(x_1(t), x_2(t))$$
$$x_2'(t) = v_2(x_1(t), x_2(t)).$$

Производную по времени принято изображать "точкой сверху", это и объясняет появившуюся выше систему.

Таким образом, если у дифференциального уравнения есть одно решение, то у него сразу же есть континуум решений – ограничение решения на любой подинтервал оси времени тоже будет решением (как же можно говорить о единственности решения? – можно, но только эту единственность надо корректно определить).

Еще одно простое, но важное замечание – если φ это решение уравнения $\dot{x} = v(x)$, а f – диффеоморфизм, то $f \circ \varphi$ будет решением уравнения $\dot{y} = f_*(v)(y)$. Это обстоятельство подчеркивает важность теоремы о выпрямлении векторного поля.

Задача. Найти все решения уравнения $\dot{x} = v_0$, $v_0 \in \mathbb{R}^n$ – постоянный вектор.

Сейчас мы сделаем много допущений и сконструируем определение. Это очень важный этап в математике, иногда самый важный. Итак, пусть есть векторное поле v в фазовом пространстве M. Для каждой точки $x_0 \in M$ мы предполагаем, что найдется решение φ_{x_0} уравнения $\dot{x} = v(x)$, определенное на всей прямой $\mathbb{R}$ и удовлетворяющее условию $\varphi(0)_{x_0} = x_0$ и более того, что такое (определенное на всей прямой и удовлетворяющее такому условию) решение всего одно! Еще не доказанная теорема о выпрямлении говорит, что эти допущения не так уж и страшны.

Рассмотрим “отображение за время T”

$$x_0 \mapsto \varphi_{x_0}(T),$$

переводящее точку в значение решения с этой начальной точкой в момент T, подразумевая именно это отображение (которое принято обозначать g^T), мы формулируем следующие определения.

Однопараметрическая группа преобразований, фазовый поток

Определение. *Однопараметрическая группа преобразований* множества M это семейство $\{g^t\}$ отображений множества M в себя, занумерованных вещественными числами ($t \in \mathbb{R}$), удовлетворяющее условию:

$$g^{t+s} = g^t g^s$$

для всех $t, s \in \mathbb{R}$ и g^0 – тождественное отображение.

Задача. Все отображения однопараметрической группы взаимно однозначны.

Определение. *Однопараметрическая группа диффеоморфизмов* это такое отображение $g\colon \mathbb{R}\times M\to M$, что

$$g(t,x)=g^t x$$

1) отображение g дифференцируемо;
2) для любого $t\in\mathbb{R}$ отображение $g^t\colon M\to M$ это диффеоморфизм;
3) семейство $g^t_{t\in\mathbb{R}}$ является однопараметрической группой преобразований.

Пример. $M=\mathbb{R}$, $g^t x = x+vt$.

И, наконец, *фазовый поток* $(M,\{g^t\})$ это фазовое пространство M, точки которого иногда называются *фазовыми точками* и однопараметрическая группа диффеоморфизмов $\{g^t\}$ фазового пространства M.

Фазовая кривая и фазовая скорость

Движением точки $x\in M$ под действием потока называется отображение

$$\varphi\colon \mathbb{R}\to M, \varphi(t)=g^t x.$$

Фазовой кривой называется образ этого отображения. *Положением равновесия* или *неподвижной точкой* называют точку x, такую что

$$g^t x = x \ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Фазовая скорость потока g^t в точке $x\in M$ это вектор скорости движения фазовой точки

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g^t x = v(x).$$

Этот вектор часто обозначается через $\dot{x}$. Почему этот вектор определен?

Задача. Покажите, что

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=\tau} g^t x = v(g^\tau x).$$

Расширенным фазовым пространством называется произведение $M\times\mathbb{R}$ фазового пространства на ось фремени. При этом неавтономное векторное поле естественно определяет уже автономное векторное поле на расширенном фазовом пространстве (в терминах дифференциальных уравнений нужно к уравнению $\dot{x}=v(x,t)$ добавить уравнение $\dot{t}=1$. Интегральные кривые – графики решений. Докажите, что их наклон постоянен вдоль горизонтали.???

Теорема сравнения

Теорема сравнения. Для двух дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=v_1(x),\ \dot{x}=v_2(x)$$

с непрерывными правыми частями, удовлетворяющими условию $v_1<v_2$, и одинаковыми начальными условиями решений $\varphi_1(t_0)=\varphi_2(t_0)=x_0$ – φ_1 – решение первого, а , φ_2 – второго уравнения, определенных на одном интервале времени, неравенство

$$\varphi_1(t)\leq\varphi_2(t)$$

справедливо для всех $t\geq t_0$ из этого интервала.

Доказательство. Пусть $\varphi_1(t)$ решение первого уравнения, а $\varphi_2(t)$ решение второго уравнения. Тогда разность производных

$$\varphi_2'(t)-\varphi_1'(t)$$

положительна при $t>t_0$, поскольку она равна разности значений v_2 и v_1. Интегрируя получаем

$$\varphi_2(t)-\varphi_1(t)=\int\limits_{t_0}^{t}[\varphi_2'(\tau)-\varphi_1'(\tau)]d\tau,$$

поскольку $\varphi_2(t_0)-\varphi_1(t_0)=0$. Поэтому при $t>t_0$ $\varphi_2(t)>\varphi_1(t)$, что нам и нужно.

Задача. Покажите, что это доказательство неверно.

Правильное доказательство. Рассмотрим решения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Тогда если $t>t_0$ близко к t_0, то $\varphi_1(t)<\varphi_2(t)$, так как $\varphi_1(t_0)=\varphi_2(t_0)$ и $\varphi_1'(t_0)<\varphi_2'(t_0)$. Если же при каком-то $T>t_0$ значение первого решения больше значения второго решения $\varphi_1(T)>\varphi_2(T)$ то на интервале (!) $]t_0, T[$ найдется такое t_1, что

$$\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_1)$$

и из всех этих t_1 можно взять наименьшее (объясните, почему это можно сделать), оно равно

$$\inf\{t_1 \in]t_0, T[\, | \, \varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_1)\}.$$

Для такого t_1 при $t_3 < t_1$ и достаточно близком к t_1 верно неравенство

$$\varphi_1(t_3) > \varphi_2(t_3).$$

Таким образом, на интервале $]t_0, t_3[$ по теореме о промежуточном значении найдется еще одно число a, автоматически меньшее t_1, такое что

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a).$$

Это противоречит минимальности t_1. Это противоречие и завершает доказательство.

Неавтономные уравнения и векторные поля

Векторные поля и соответствующие дифференциальные уравнения могут (что часто встречается на практике) зависеть от времени. Такое уравнение имеет вид

$$\dot{x} = v(t, x),$$

его решение – функция φ (определенная также как и в автономном случае на интервале), такая что

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = v(t, \varphi(t)).$$

Почему я об этом говорю – первое уравнение, которое мы решим, после примера $\dot{x} = c$, является неавтономным:

$$\dot{x} = f(t),$$

а функция f предполагается гладкой (хотя бы непрерывной). Собственно, интегральное исчисление было создано для решения этого уравнения. Решение с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ дается формулой

$$\varphi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau$$

докажите это и то, что решения с одинаковым начальным условием совпадают на пересечении интервалов областей определения решений.

Теорема. Пусть функция v дифференцируема. Тогда решение уравнения $\dot{x} = v(x)$ существует, любые два решения с одинаковым начальным условием совпадают в некоторой окрестности точки t_0. Кроме этого, решение φ уравнения с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ удовлетворяет соотношению

$$t - t_0 = \int\limits_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{v(\xi)},$$

если $v(x_0) \neq 0$, и

$$\varphi(t) = x_0,$$

если $v(t_0) = 0$.

Пример. Пусть $v = x^{2/3}, t_0 = 0, x_0 = 0$ нулевое решение и $(t/3)^3$ тоже решение.

Попробуйте доказать эту теорему.

Третья лекция, 22 сентября

Мы будем рассматривать неавтономные уравнения $\dot{x} = v(x,t)$. Нет никакой надежды решить уравнение такого вида, однако решение можно найти с хорошей точностью. Один способ такой – строить так называемые ломаные Эйлера. Чтобы найти решение с начальным условием $\varphi(0) = x_0$ в момент времени t_0 разобьем отрезок $[0, t_0]$ на N равных частей точками

$$\tau_i = i\frac{t_0}{N}.$$

На каждом отрезке $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ $(\tau_0 = 0)$ из отрезков $[0, \tau_1], [\tau_1, \tau_2], ..., [\tau_{N-1}, \tau_N]$ точка движется с постоянной скоростью $v(x_N^{i-1}, \tau_{i-1})$ и ее значение x_N^i в момент τ_i вычисляется из значения в τ_{i-1}, а значение в 0 равно x_0. Таким образом, последовательно получаем все точки $x_N^1, x_N^2, ..., x_N^N$ и кусочно-афинное отображение

$$\varphi_N \colon [0, t_0] \to \mathbb{R}^n,$$

приближающее решение φ. Мы не будем доказывать, что предел последовательности кусочно-линейных функций сходится к решению, хотя это верно.

Задача 1. Для векторного поля $v(x) = kx$ на прямой вычислить $\varphi_N(t_0)$ и доказать, что

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_N(t_0) = e^{kt_0}x_0.$$

Задача 2. Для векторного поля $v(x,y) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ и $x_0 = (a, 0)$ вычислить $\varphi_N(t_0)$ и найти предел $\lim\limits_{N\to\infty} \varphi_N(t_0)$.

Французские школьники, как показывали мне их родители около 2010 года, знакомясь (в младших классах) с движением планет вокруг Солнца решали именно соответствующее второй задаче дифференциальное уравнение на плоскости методом ломаных Эйлера с каким-то фиксированным N (может быть 10) (решал, конечно, компьютер, и рисовал им ломаную Эйлера). У них выходило, что планеты улетают от Солнца по "спирали" .

Метрические пространства и теорема о сжатых отображениях.

Напомню, что метрическое пространство это пара (M,ρ), состоящая из множества M и функции ρ на $M\times M$ со значением в неотрицательных числах. Эта функция, называемая *метрикой* должна удовлетворять следующим аксиомам (условий) 1) $\rho(x,y)=0$ если и только если $x=y$; 2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ при любых x,y; 3) $\rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$.

Метрических пространств очень много, некоторые из них нам встретятся в доказательстве теоремы существования.

Наш основной инструмент есть теорема о сжатых отображениях, напомним ее. Отображение $f\colon M\to M$ метрического пространства в себя называется *сжатым*, если $\rho(f(x),f(y))\le\lambda\rho(x,y)$ для некоторого $0\le\lambda<1$ и всех $x,y\in M$. Точка x называется *неподвижной* для отображения f, если $f(x)=x$.

Теорема о сжатом отображении. Пусть f сжатое отображение полного пространства. Тогда у него есть единственная неподвижная точка.

Доказательство. Для любой точки $x\in M$ последовательность

$$x, f(x), f(f(x)), f^3(x), ...$$

сходится к этой неподвижной точке. Действительно,

$$\rho(f^n(x),f^{n+1}(x))\le\lambda^n\rho(x,f(x)).$$

Поэтому, $(f^n(x))$ является фундаментальной последовательностью (почему?). Докажем, что ее предел y является неподвижной точкой. Действительно, сжатые отображения непрерывны — дельту (в определении непрерывности) можно брать равной эпсилону. Имеем

$$f(y)=f(\lim f^n(x))=\lim f^{n+1}(x)=y.$$

Пусть z неподвижная точка, тогда

$$\rho(f(y),f(z))\le\lambda\rho(y,z),$$

так как f сжатое имеем $\rho(y,z)=0$.

Задача. Пусть z неподвижная точка сжатого отображения с параметром λ и $\rho(x,f(x))=d$. Докажите, что

$$\rho(x,z)\le\frac{d}{1-\lambda}.$$

Последовательные приближения Пикара.

Определим магическое отображение P:

$$P(\varphi)(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} v(\varphi(\tau), \tau) d\tau.$$

Пока еще это даже не отображение – не очень понятно где оно определено. Рассмотрим графики, живущие в расширенном фазовом пространстве. Касательная к графику $P(\varphi)$ в точке с абсциссой t параллельна $(v(\varphi(t), t), 1)$ – докажите. Для решения с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ имеем $P(\varphi) = \varphi$.

Пример 1. Для неавтономного векторного поля $v = g(t)$, $\dot{x} = g(t)$ начнем с $\varphi(t) = x_0$ (постоянная). Тогда $P(\varphi) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} g(\tau) d\tau$ – первое же приближение Пикара есть решение.

Пример 2. Для векторного поля на прямой $\dot{x} = x$ $t_0 = 0$ начнем опять с $\varphi(t) = x_0$:

$$P(\varphi)(t) = x_0 + \int\limits_{0}^{t} x_0 d\tau = x_0(1 + t)$$

$$P^2(\varphi)(t) = x_0 + \int\limits_{0}^{t} x_0(1 + \tau) d\tau = x_0(1 + t + \frac{t^2}{2})$$

$$...$$

$$P^n(\varphi)(t) = x_0(1 + t + \frac{t^2}{2} + ... + \frac{t^n}{n!}).$$

Мы видим последовательные частичные суммы разложения Тейлора для экспоненты. Отметим, что мы еще не разобрались где действует отображение Пикара. В дальнейшем доказательстве мы построим полное метрическое пространство, в котором отображение Пикара сжато.

Нам понадобятся следующие объекты:

1. **Норма** $|x| = \sqrt{(x, x)}$ – длина вектора.

2. **Условие Липшица:** для отображения $F\colon (M_1,\rho_1) \to (M_2,\rho_2)$ метрических пространств, говорят, что это отображение удовлетворяет условию Липшица с константой $L > 0$, если F изменяет расстояние между любыми двумя точками не больше, чем в L раз

$$\rho_2(F(x), F(y)) \leq L\rho_1(x, y).$$

Задачи. 1) $y = \sqrt{x}$ (отображение $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ со стандартной метрикой в образе и прообразе $\rho(x,y) = |x-y|$); 2) $y = x^2$ (те же области определений и значений и метрика); 3) $y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ на плоскости и луче евклидовы метрики); 4) условие Липшица напоминает сжатость, следует из нее, липшицевы отображения автоматически непрерывны; 5) верно ли, что непрерывное отображение компакта в себя липшицево?

Пусть есть оператор из пространства L_1 с нормой $||.||_1$ в пространство L_2 с нормой $||.||_2$. Его нормой $||A||$ называют число (если оно существует)

$$\sup_{x \in L_1 \setminus \{0\}} \frac{||Ax||_2}{||x||_1}.$$

Если пространства L_1 и L_2 конечномерны, то норма существует и достигается (докажите).

Лемма. Пусть f непрерывно дифференцирумое отображение выпуклого компакта (лежащего в открытой области определения f) $V \subset \mathbb{R}^m$ в пространство $\mathbb{R}^n$. Тогда f на V липшицево с константой L, равной точной верхней грани (на V) нормы производной отображения f,

$$L = \sup |f_*|.$$

Доказательство. Соединим точки x и y отрезком $z(t) = x + t(y-x)$ $t \in [0,1]$. Имеем:

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(z(t))dt = \int_0^1 f_{*z(t)}\dot{z}(t)dt.$$

На это равенство можно поставить модуль и превратить его в неравенство

$$\left|\int_0^1 f_{*z(t)}\dot{z}(t)dt\right| \leq \int_0^1 L|x-y|dt = L|y-x|.$$

Подумайте, почему это превращение законно.

Теперь вернемся к нашему дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = v(x,t).$$

Относительно v мы предполагаем, что v определена и дифференцируема (класса C^r с $r \geq 1$) в некоторой области U, лежащей в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Зафиксируем точку $(x_0, t_0) \in U$. Зафиксируем теперь достаточно малые положительные числа a, b такие, что цилиндр $I_{a,b}$

$$(x,t) : |t-t_0| \leq a, |x-x_0| \leq b$$

лежит в U. Пусть $C = \sup|v|$ и $L = \sup|v_*|$ (точные грани берутся по зафиксированному цилиндру, а производная "берется по x").

Теперь рассмотрим конус

$$K_0 = \{(x,t) : |t-t_0| \leq a', |x-x_0| \leq C|t-t_0|\}.$$

Если числа a' и b' достаточно малы то конус K_0 и даже все параллельно перенесенные (из конуса $_0$) конусы (их мы обозначаем через K_x) с вершинами в точке (x, t_0) где $|x-x_0| \leq b'$ лежат внутри первоначального цилиндра $I_{a,b}$.

Решение нашего уравнения с начальным условием $\varphi(t_0) = x$ мы ищем в виде

$$\varphi(t) = x + h(x,t)$$

Тогда соответствующая интегральная кривая будет лежать внутри конуса K_x.

Построим метрическое пространство M: оно состоит из всех непрерывных отображений h цилиндра

$$|x-x_0| \leq b', |t-t_0| \leq a'$$

в $\mathbb{R}^n$, таких что

$$|h(x,t)| \leq C|t-t_0|.$$

А метрика на этом пространстве

$$\rho(h_1, h_2) = ||h_1 - h_2||$$

есть обычная C^0-метрика.

Утверждение. (M, ρ) является полным пространством.

Доказательство. Равномерный предел непрерывных отображений непрерывен, предел тоже удовлетворяет неравенству с константой C.

Рассмотрим отображение $P\colon M \to M$:

$$Ph(x,t) = \int\limits_{t_0}^{t} v(x + h(x,\tau), \tau) d\tau.$$

Точка $(x + h(x,\tau), \tau)$ лежит в K_x, в ней определено v. Покажем, что при достаточно малом a' отображение P переводит M в себя и сжато.

Во-первых, Ph непрывно (интеграл непрерывно зависящей от параметра непрерывной функции непрерывно зависит от параметра и верхнего предела интегрирования). Во-вторых,

$$|Ph(x,t)| \leq |\int\limits_{t_0}^{t} v(...) d\tau| \leq |\int\limits_{t_0}^{t} C dt| \leq C|t - t_0|,$$

потому $P(M) \subset M$.

Покажем, что при достаточно малых a' отображение P сжато.

$$(Ph_1 - Ph_2)(x,t) = \int\limits_{t_0}^{t} (v_1 - v_2) d\tau,$$

где $v_i(\tau) = v(x + h(x,\tau), \tau)$.

Во-первых,

$$|v_1(\tau) - v_2(\tau)| \leq L|h_1(x,\tau) - h_2(x,\tau)| \leq L||h_1 - h_2||.$$

Во-вторых,

$$|Ph_1(x,t) - Ph_2(x,t)| \leq |\int\limits_{t_0}^{t} L||h_1 - h_2||d\tau| \leq La'||h_1 - h_2||$$

и при $La' < 1$ отображение сжато. Таким образом доказана теорема:

Теорема. Если v непрерывно дифференцируемо в окрестности точки (x_0, t_0) расширенного фазового пространства, то у точки t_0 есть окрестность, что в этой окрестности определено решение с начальным условием $\varphi(t_0) = x$, где x любая достаточно близкая к x_0 точка, причем это решение непрерывно зависит от начального x.

Рассмотрим неподвижную точку h отображения P. Пусть $g(x,t) = x + h(x,t)$.

$$g(x,t) = x + \int\limits_{t_0}^{t} v(g(x,\tau),\tau)d\tau$$

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = v(g(x,t),t)$$

Теорема существования доказана.

Теорема единственности вытекает из того, что при $b' = 0$ из единственности неподвижной точки сжатого отображения следует единственность решения

Лекция четвертая, 29 сентября

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(t, x),$$

заданное в некоторой области расширенного фазового пространства. Возьмем точку(t_0, x_0) этой области.

Теорема 1. Существует диффеоморфизм f окрестности V этой точки на окрестность W, лежащей в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, с координатами $(t, y_1, ..., y_n)$ такой, что исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$\dot{y} = 0.$$

В этом условии немного замазано, что этот диффеоморфизм сохраняет координату t. Эквивалентность означает, что $\varphi\colon I \to V$ решение исходного уравнения тогда и только тогда, когда $f \circ \varphi\colon I \to W$ решение второго уравнения.

Доказательство. Рассмотрим отображение (в обратную сторону), определенное формулой

$$G(x, t) = (g(x, t), t)$$

где $g(x, t)$ есть решение исходного уравнения с начальным условием $g(x, t_0) = x$.

Покажем, что G в окрестности точки (x_0, t_0) есть выпрямляющий диффеоморфизм.

1) Отображение G дифференцируемо. Это (пока) не доказано.

2) Отображение G оставляет координату t на месте, по построению.

3) Отображение G_* переводит стандартное векторное поле

$$e(\dot{x} = 0, \dot{t} = 1)$$

в поле

$$(v, 1).$$

4) Отображение G в окрестности точки (x_0, t_0) является диффеоморфизмом. Потому что сужение G_* на $\mathbb{R}^n$ тождественно, а $G_*(e) = v + e$. Следовательно, G локальный диффеоморфизм. $\square$

Теорема о выпрямлении векторного поля.

Напомнить как диффеоморфизмы действуют на векторные поля.

Рассмотрим теперь автономное уравнение

$$\dot{x} = v(x),$$

заданное в области $\mathbb{R}^n$; поле v предполагается гладким. Пусть x_0 точка области определения.

Теорема 2. В некоторой окрестности точки x_0 поле v диффеоморфно постоянному полю $\frac{\partial}{\partial x_1}$. То есть найдется диффеоморфизм f этой окрестности той же гладкости C^r $r \geq 1$ что и векторное поле, что

$$f_* v = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

В такой формулировке теорема неверна — почему? нужно добавить условие неособости $v(x_0) \neq 0$.

Доказательство. Вектор $v_0 = v(x_0)$ отличен от нуля. Есть гиперплоскость Γ^{n-1}, проходящая через x_0, и трансверсальная прямой, натянутой на v_0. Строим отображение G:

$$G(\xi, t) = g(\xi, t),$$

где $\xi \in \Gamma^{n-1}$, а $g(\xi, t)$ есть значение решения φ с начальным условием

$$\varphi(0) = \xi.$$

Обратное отображение G^{-1} является выпрямляющим диффеоморфизмом. $\square$

Задача. Пусть векторное поле на плоскости всюду гладкое и всюду ненулевое. Можно ли его выпрямить диффеоморфизмом плоскости?

Задача с неизвестным ответом. Есть ли у полей направлений без особенностей "модули"? Более формально можно спросить так, рассмотрим поле направлений без особых точек ξ на $\mathbb{R}^n$. Поле ξ индуцирует поле ξ_c на полупространстве $x_1 > c$. Все эти пространства, очевидно, диффеоморфны. Может ли так быть, что поля направлений ξ_c не переводятся друг в друга (при разных значениях c) диффеоморфизмами?

Продолжаемость решений.

Вот пример векторного поля на прямой, решения которого не продолжаются ни вперед ни назад по времени $v(x) = (x^2+1)\frac{\partial}{\partial x}$.

Задача. Найдите максимальную длину интервала времени, на котором определено (какое-нибудь) решение.

Теорема о продолжении. Пусть v гладкое векторное поле в области U, x_0 точка из U. Говорят, что решение с начальным условием x_0 продолжается вперед до подмножества Γ области U, если существует решение φ, определенное на отрезке $[t_0, T]$, $\varphi(t_0) = x_0$ и $\varphi(T) \in \Gamma$.

Собственно теорема: Решение φ можно продолжать вперед (назад) неограниченно или до границы компакта. Два решения с совпадающим начальным условием совпадают на пересечении областей определения. Граница компакта это множество точек компакта в любой окрестности которых есть точки не принадлежащие компакту.

Априорная оценка. Для ответа на вопрос – продолжается ли решение неограниченно часто помогают так называемые априорные оценки. Вот пример работы соответствующего метода. Пусть есть (вообще говоря неавтономное) векторное поле $v(x,t)$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ и мы знаем (откуда-то), что решение $\varphi(t)$ уравнения $\dot{x} = v(x,t)$, если оно существует удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(t)| \leq g(t)$$

и функция g монотонна. Для каждого $T > 0$ рассмотрим произведение замкнутого шара $D_{2g(T)}(0) \subset \mathbb{R}^n$ радиуса $2g(T)$ с центром в нуле на отрезок $[-T, T]$. Это компакт, K_T его граница состоит из произведения сферы $S_{2g(T)}(0)$, границы шара $D_{2g(T)}(0)$, на отрезок $[-T, T]$ и двух дисков $D_{2g(T)}(0) \times -T$ и $D_{2g(T)}(0) \times T$. При продолжении решения вперед (при $t \geq 0$) фазовая траектория поля $v(x,t) + \frac{\partial}{\partial t}$ не может выйти на часть границы $S_{2g(T)}(0) \times [-T, T]$ в силу априорной оценки, следовательно обязана выйти на $D_{2g(T)}(0) \times T$, следовательно решение продолжается на любой отрезок $[0, T]$. Примерно так же доказывается продолжаемость на любой отрезок $[-T, 0]$.

Первые интегралы.

Первые интегралы векторного поля v это функции f, такие что

$$L_v f = 0.$$

Первых интегралов много локально, в окрестности неособой точки. А именно – первый интеграл векторного поля $\frac{\partial}{\partial x_1}$ на $\mathbb{R}^n$ это любая гладкая функция, от оставшихся координтат $x_2, ..., x_n$.

Задача. Почему у эйлерова поля $\sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ нет глобальных первых интегралов кроме констант? Найти первый интеграл гладкий вне нуля для эйлерова поля.

Мы определим ужасным и неинвариантным способом гамильтоново поле на координатном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n$ как поле

$$v_H = -\sum \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i},$$

где поле v_H зависит от функции $H\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$. Функция H называется функцией Гамильтона (или гамильтонианом) поля v_H.

Задача. Функция Гамильтона H является первым интегралом гамильтонова поля v_H.

Консервативная система с одной степенью свободы.

Консервативная система с одной степенью свободы, это такое дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} = F(x).$$

Это уравнение часто называют уравнением Ньютона.

Здесь функция F определена на интервале I, который называют конфигурационным пространством, координату x называют координатой $\dot{x}$ – скоростью, $\ddot{x}$ – ускорением, $F(x)$ – силой. Это уравнение эквивалентно системе

$$\dot{x_1} = x_2, \;\; \dot{x_2} = F(x_1),$$

что объясняет, что такое уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением (на плоскости).

Кроме этого, функцию

$$T = \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{x_2^2}{2}$$

называют кинетической энергией, функцию

$$U = -\int_{x_0}^{x} F(\tau)d\tau$$

называют потенциальной энергией, а функцию $E = T + U$ полной энергией.

Теорема. (закон сохранения энергии) Полная энергия является первым интегралом.

Доказать эту теорему очень просто – надо продифференцировать функцию E вдоль векторного поля и убедиться, что производная равна нулю.

Множество уровня энергии явлется гладкой кривой в окрестности точек, не являющихся положением равновесия – докажите. Тут надо разбирать примеры с подходящей потенциальной энергией – как устроены эти кривые и как происходит движение точки.

Уравнение Ньютона решается "в квадратурах". Действительно, любое решение $(x(t), \dot{x}(t))$ в силу закона сохранения энергии удовлетворяет тождеству

$$\frac{\dot{x}(t)}{2} + U(x(t)) = E_0,$$

где $E_0 = E(x(0), \dot{x}(0))$. Следовательно,

$$\dot{x}(t) = \pm\sqrt{2(E_0 - U(x(t)))}.$$

Рассмотрим множество $L_c = \{E(x_1, x_2) = c\}$, линию уровня энергии. Докажите, что если число c не является критическим значением потенциальной энергии, то это гладкое подмногообразие плоскости, на котором нет неподвижных точек векторного поля. Легко показать, что это подмногообразие состоит из не более чем счетного числа компактных компонент, диффеоморфных окружности, и не более чем двух лучей.

Пусть c некритическое значение и отрезок $[a, b]$ таков, что $U(a) = U(b) = c$, и при $a < x < b$ $U(x) < c$. Тогда L_c пересекается с $[a, b] \times \mathbb{R}$ по компоненте, диффеоморфной окружности. При близких t к t_0

решение φ с начальным условием $\varphi(t_0) = x_1 \in]a, b[$ и $\dot{\varphi}(t_0) = x_2 > 0$ удовлетворяет, как мы знаем, соотношению

$$t - t_0 = \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t_1)} \frac{d\xi}{\sqrt{2(c - U(\xi))}}.$$

Задача. Движение по этой компоненте периодично с периодом

$$2 \int_a^b \frac{d\xi}{\sqrt{2(c - U(\xi))}}.$$

Обсудим теперь продолжаемость решений уравнения Ньютона.

Задача. Покажите, что для потенциальной энергии

$$U(x) = -\frac{x^4}{2}$$

некоторые решения не продолжаются неограниченно.

Однако, если потенциальная энергия положительна, то каждое решение уравнения Ньютона продолжается неограниченно. Это вытекает из следующей априорной оценки. Если решение $x(t)$ уравнения Ньютона существует при $|t| < T$, то верны неравенства

$$\dot{x}(t) \leq \sqrt{2E_0},\ |x(t) - x(0)| \leq \sqrt{2E_0}|t|.$$

Первое неравенство есть следствие закона сохранения энергии, второе – интеграл первого. Из этих неравенств стандартным (после сегодняшнего рассказа методом) вытекает продолжаемость решения, закончите его самостоятельно.

Лекция пятая, 6 октября

Уравнение в вариациях.

Как обычно – пусть есть векторное поле v в $\mathbb{R}^n$ или его открытом подмножестве. Рассмотрим фазовую кривую (решение соответствующего дифференциального уравнения) $\varphi(t), t \in [0, T]$ для этого векторного поля. Можно себе представлять, что мы запускали ракету на Марс 50 лет назад и долго трудились, вычисляя решение соответствующего дифференциального уравнения, а компьютеры были в миллионы раз слабее сегодняшних. Конечно, точно направить ракету мы не можем, поэтому она как-то отклонится. Здравый вопрос – как именно? И в первом порядке за отклонение решения отвечает дифференциал отображения фазового потока поля v за время $[0, T]$

$$dg^T(x_0),$$

где $\varphi(t) = g_v^t(x_0)$, тут x_0 какое-то, тоже с непомерным трудом вычисленное начальное условие. Сейчас мы получим (другое) дифференциальное уравнение, при помощи следующего простого и важного рассуждения. Рассмотрим решение $\varphi(t, \varepsilon)$ (по времени t оно решение, но зависит от параметра ε), имеем:

$$\varphi(\dot{t}, \varepsilon) = v(\varphi(t, \varepsilon)),$$

где точка это производная по t. Разложим это равенство в ряд по параметру ε до первого члена:

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi(t, 0) + \varepsilon z(t) + ...$$

$$v(\varphi(t, \varepsilon)) = v(\varphi(t, 0) + \varepsilon x(t) + ...) = v(\varphi(t, 0)) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(t, 0)) z(t) + ...,$$

где $\frac{\partial v}{\partial x}$ это матрица, подумайте какая. Мы не обосновываем строго ничего – мы не знаем почему можно разложить в ряд (мы не доказывали, что верна теорема о дифференцируемости), тем не менее в предположении что эта теорема о дифференцируемости верна мы видим что $z(t)$ – производная решения по ε – удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(t, 0)) z.$$

Это неавтономное (так скорее всего будет даже если исходное поле было автономным!) линейное дифференциальное уравнение называется уравнением в вариациях.

Замечание. Мы неявно использовали структуру линейного (или даже афинного) пространства в этом рассуждении.

Задача. Отображение, переводящее z_0 в значение решения уравнения в вариациях с начальным условием $z(0) = z_0$ в значение $z(T)$ в момент $t = T$, это и есть нужное нам отображение

$$dg^T(x_0).$$

Задача. Выписать уравнение в вариациях для векторного поля $a(x)\frac{\partial}{\partial x}$, $a = 0, 1, 2x - 1, x^2$ вдоль решения с начальным условием $\varphi(0) = 1$.

Линейные системы и экспонента.

1. Линеаризация. Пусть есть дифференциальное уравнение (векторное поле)

$$\dot{x} = v(x)$$

и ноль его неподвижная точка $v(0) = 0$. Рассмотрим разложение поля в ряд $v(x) = Ax + \varphi(x)$, где $|\varphi(x)| = o(|x|)$ при $|x| \to 0$ (φ – члены выше первого порядка в разложении Тейлора, если v аналитично). Линеаризация (в нуле) это переход к уравнению

$$\dot{x} = Ax.$$

Задача. Почему эта операция не зависит от системы координат? И что это (независимость) значит?

2. Однопараметрическая группа линейных преобразований

Задача. Докажите, что если g^t однопараметрическая группа линейных преобразований, то движение $\varphi(t)$ точки x_0 есть решение уравнения

$$\dot{x} = Ax$$

с начальным условием $\varphi(0) = x_0$, а оператор A определен равенством

$$Ax = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g^t x.$$

Мы сейчас увидим, что верно обратное: по оператору A можно построить однопараметрическую группу g^t.

Задача. Найти поле скоростей вращения вокруг оси с угловой скоростью ω.

3. Что такое линейное уравнение – уравнение $\dot{x} = Ax$ на $\mathbb{R}^n$, заданное векторным полем Ax, где A линейный оператор на $\mathbb{R}^n$.

Случай одной координаты мы знаем – решение дифференциального уравнения дается экспонентой

$$e^{At}x_0.$$

В общем многомерном случае все также, даже формула такая же. Нужно только определить что это такое – экспонента от матрицы (оператора), чем мы и займемся сейчас.

4. Как и в случае прямой, экспоненту можно определить как сумму ряда или предел

$$E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ...$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(E + \frac{A}{n}\right)^n.$$

Для понятия сходимости требуется норма оператора,. Пространство $\mathbb{R}^n$ евклидово с длиной вектора $|(x_1, ..., x_n)| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$. Норма оператора A нам уже встречалась, она определяется как

$$||A|| = \max_{|x|=1}|Ax.|$$

Задача. Верно ли, что $||A||^2 \le \sum\limits_{i,j} a_{ij}^2$.

Теорема. Линейные операторы образуют n^2-мерное пространство, полное метрическое.

В нем (полном нормированном пространстве) можно складывать ряды и даже почленно их дифференцировать: Если ряд из функций $f_i\colon \mathbb{R} \to M$ сходится и ряд из производных сходится равномерно, то ряд из производных сходится к производной суммы ряда.

5. Экспонентой оператора A называют сумму ряда

$$E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ...$$

Теорема. Этот ряд сходится равномерно на любом множестве

$$\{A|\ ||A|| \leq c\}.$$

Задача. Вычислить e^{tA}, для оператора A, определенного матрицей

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Теорема. Рассмотрим оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$ на пространстве многочленов степени не выше n. Пусть $e^{t\frac{d}{dt}} = S_t$, тогда S_t есть оператор сдвига на t в пространстве многочленов степени не выше n: оператор S_t переводит многочлен $f(x)$ в многочлен $f(x+t)$.

Доказательство – формула Тейлора для многочленов (конечна!)

$$f(x+t) = f(x) + \frac{t}{1!}\frac{df}{dx} + \frac{t^2}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2} + ...$$

и совпадает с формулой для экспоненты. $\square$

6. Для диагонального оператора и диагонализируемого легко вычислять экспоненту.

Например – экспонента оператора $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ это половина оператора $\begin{pmatrix} e^2+1 & e^2-1 \\ e^2-1 & e^2+1 \end{pmatrix}$, докажите.

Задача.

$$C^{-1}e^A C = e^{C^{-1}AC}.$$

7. Удобно считать экспоненту нильпотентного оператора (оператор называется нильпотентным, если какая-то его степень равна нулю) – ряд для экспоненты превращается в многочлен .

Задача. Вычислите экспоненту от нильпотентной жордановой клетки умноженной на t.

8. Квазимногочлены с показателем λ: функции вида $e^{\lambda x}f(x)$, где f это многочлен, степень многочлена это степень квазимногочлена по определению.

Вычислить матрицу e^{At} для жордановой клетки с собственным числом λ.

9. Семейство операторов e^{tA} является однопараметрической группой – перемножить ряды (задуматься – почему можно перемножать ряды).

Задача. Доказать, что

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}.$$

Задача. Верно ли, что $e^{A+B} = e^A e^B$?

10. Формула для решения уравнения $\dot{x} = Ax$ с начальным условием $\varphi(0) = x_0$

$$\varphi(t) = e^{tA}x_0,$$

докажите.

Лекция шестая, 13 октября

Экспонента еще раз.

1. Напомним, что экспонента оператора A определяется, как сумма ряда

$$E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ...$$

Задача. Найдите производную экспоненциального отображения $A \to e^A$ в нуле (=нулевом операторе).

Теорема. Решение линейной системы $\dot{x} = Ax$ с начальным условием x_0 дается формулой

$$e^{tA}x_0$$

при всех $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Утверждение. Если L инвариантное подпространство для A, то и для e^{tA} оно инвариантно.

В самом деле, ограничим векторное поле на L получим векторное поле на L, решения которого которое автоматически лежит в L. По теореме единственности эти же решения являются решениями "большого" уравнения. Поэтому подпространство L инвариантно относительно фазового потока. $\square$

2. **Второе определение экспоненты** как и в случае одной переменной дается пределом

$$e^A = \lim_{n\to\infty} \left(E + \frac{A}{n}\right)^n .$$

Почему это определение приводит к тому же результату –

$$e^A - \left(E + \frac{A}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{k!} - \frac{C_m^k}{m^k})A^k$$

коэффициенты этой разности неотрицательны, поскольку

$$\frac{1}{k!} \geq \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{m \cdot m \cdot ... \cdot m}\frac{1}{k!}.$$

Поэтому для $a = ||A||$

$$||e^A - \left(E + \frac{A}{m}\right)^m || \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{k!} - \frac{C_m^k}{m^k}) a^k = e^a - \left(E + \frac{a}{m}\right)^m,$$

а это стремится к нулю при $m \to \infty$.

3. **Экспонента и формула Эйлера.**

Задача. Найти матрицу A умножения на число $z = a + bi$, считая $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Ответ: $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Найдем теперь оператор e^A. Оператор $E + \frac{A}{n}$ есть умножение на комплексное комплексное число $1 + \frac{z}{n}$. То есть поворот на аргумент числа $1 + \frac{z}{n}$ и умножение на модуль этого числа.

Задача. При $n \to \infty$ верны следующие ассимптотические равенства:

$$\arg(1 + \frac{z}{n}) = \mathrm{Im}\frac{z}{n} + o(\frac{1}{n})$$

$$|1 + \frac{z}{n}| = 1 + \mathrm{Re}\frac{z}{n} + o(\frac{1}{n}).$$

Откуда

$$\lim_{n\to\infty} n \arg(1 + \frac{z}{n}) = \mathrm{Im} z,$$

$$\lim_{n\to\infty} |1 + \frac{z}{n}|^n = e^{\mathrm{Re} z}.$$

Таким образом, экспонента оператора умножения на $a + bi$ есть оператор умножения на комплексное число $e^a(\cos b + i \sin b)$.

4. **Определитель экспоненты.** Определитель вычисляется по формуле

$$\det e^A = e^{\mathrm{Tr} A}.$$

Это можно вывести из теоремы о жордановой нормальной форме. А можно из второго определения экспоненты:

$$\det e^A = \det(\lim_{n\to\infty} \left(E + \frac{A}{n}\right)^n) = \lim_{n\to\infty} (\det \left(E + \frac{A}{n}\right)^n))$$

определитель – непрерывная функция матрицы

$$\lim_{n\to\infty}(\det\left(E+\frac{A}{n}\right)^n)) = \lim_{n\to\infty}(\det\left(E+\frac{A}{n}\right))^n = (1+\frac{1}{n}\mathrm{Tr}A+O(\frac{1}{n^2}))^n$$

Откуда следует утверждение.

Пример. Маятник с трением $-k$ – уравнение

$$\ddot{x} = -x + k\dot{x}$$

задает обыкновенное уравнение $\dot{u} = Au$ с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$, след которой равен k. Если $k < 0$ то преобразования g^t при положительных t переводят области в области с меньшей площадью. И так далее, отдельно случай $k = 0$.

5. **Вычисление матрицы экспоненты в случае различных вещественных чисел.** Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = Ax,$$

где все собственные числа оператора A вещественны и некратны. Тогда матрица e^{tA} сопряжена диагональной с собственными числами $e^{t\lambda_k}$ (λ_k – собственные числа A).

Рецепт решения соответствующего уравнения с данными начальными условиями: Составить характеристическое уравнение, найти его корни $\lambda_1, ..., \lambda_n$ и соответствующие ненулевые собственные векторы $e_1, ..., e_n$. Разложить вектор начальных условий x_0 по собственным векторам

$$x_0 = C_1 e_1 + ... + C_n e_n.$$

Искомое решение есть

$$C_1 e^{t\lambda_1} e_1 + ... + C_n e^{t\lambda_n} e_n.$$

Отметим, что элементы матрицы e^{At} в любом базисе линейная комбинация экспонент $e^{t\lambda_1}, ..., e^{t\lambda_n}$.

6. Более простая (на первый взгляд) и родственная дискретная задача: найти последовательность $A^n x_0$.

Пример. Последовательность Фибоначчи.

Вектор $\xi_n = (x_n, x_{n-1})$ есть $A\xi_{n-1}$, где A это оператор с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Собственные числа $\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, легко получается (как?) известная формула Бине для чисел Фибоначчи:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n).$$

7. **Комплексификация и овеществление.** Овеществление – забыть структуру $\mathbb{C}$-модуля, оставив структуру $\mathbb{R}$-модуля. Овеществление пространства $\mathbb{C}^n$ есть ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Овеществление оператора это $\mathbb{R}$-линейный оператор, поточечно совпадающий с исходным комплексным.

Комплексификация пространства – пространство пар, где умножение на комплексное число и сложение определено стандартно, подобно тому как определяется сложение и умножение двух комплексных чисел, рассматриваемых как пара вещественных чисел.

$A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ вещественный оператор.

Рассмотрим комплексное уравнение ($z \in \mathbb{C}^n$)

$$\dot{z} = Az.$$

Его решением называется такое отображение интервала в $\mathbb{C}^n$, что его овеществление является решением овеществленного уравнения. Оказывается, комплексные уравнения решаются также как вещественные – экспонентой, решение задается той же функцией $e^{tA}z_0$. Это теоремы!

Разобрать комплекно линейное уравнение в $\mathbb{C}$, его овеществление, графики его решений (т.е. интегральные кривые) – подчеркнуть случай чисто мнимого числа. Фазовая кривая (если собственное число комплексно и не чисто мнимо) называется логарифмической спиралью. Она задается уравнением

$$\varphi = \frac{\ln r}{k}.$$

А особая точка соответствующего векторного поля называется фокусом – устойчивым если $\mathrm{Re}\lambda > 0$ и неустойчивым при $\mathrm{Re}\lambda < 0$.

8. **Вычисление матрицы экспоненты в случае различных собственных чисел.** Рассмотрим случай, когда вещественная матрица имеет комплексные собственные числа.

Собственные числа вещественного многочлена делятся на пары комплексно сопряженных и одиночные вещественные. Пусть собственные числа некратные (это случай общего положения). Тогда каждому вещественному можно сопоставить свой вещественный собственный вектор, и натянутую на него прямую, а паре сопряженных (с собственными числами $\lambda, \bar{\lambda}$) – двумерное вещественное инвариантное пространство.

Действительно (двумерный случай, сопряженные собственные числа) — собственному числу λ отвечает комплексная прямая $\mathbb{C}_\lambda$, а сопряженному числу $\bar{\lambda}$ комплексная прямая $\mathbb{C}_{\bar{\lambda}}$, составленная из сопряженных точек к точкам $\mathbb{C}_\lambda$. Эти прямые не совпадают и их сумма есть двумерное комплексное пространство. Пусть ξ собственный вектор с собственным числом λ тогда $\bar{\xi}$ собственный вектор с собственным числом $\bar{\lambda}$. Вектор ξ есть сумма $x+iy$, x – вещественная часть, а y – мнимая. Векторы x, y вещественны и лежат в $C_\lambda \oplus \mathbb{C}_{\bar{\lambda}}$. Поскольку они выражаются (т.е. являются комплексными линейными комбинациями) через $\xi, \bar{\xi}$: $\bar{\xi} = x - iy$. Вот очевидные явные формулы

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi}), y = \frac{1}{2i}(\xi - \bar{\xi}).$$

Векторы x, y комплексно линейно независимы – они образуют базис $C_\lambda \oplus \mathbb{C}_{\bar{\lambda}}$. Пусть $\lambda = a + bi$. Тогда Ax это $1/2(\lambda\xi + \bar{\lambda}\bar{\xi}) = a(1/2(\xi + \bar{\xi})) + (1/2bi)\xi - (1/2bi)\bar{\xi} = ax - by$, аналогично $Ay = bx + ay$. В случае некратных собственных чисел вещественное фазовое пространство распадается в прямую сумму одномерных и двумерных пространств.

Докажите (фактически мы уже это сделали), что в двумерном случае ограничение оператора на двумерную плоскость является овеществлением умножения на комплексное число λ.

9. **Линейные системы на плоскости.** Случай линейных систем на плоскости полностью обозрим. Собственные числа вещественны — разных знаков – особая точка называется седло. Одного знака –

узел – устойчивый или неустойчивый. Кратные – (ненулевая) клетка – тоже узел (вырожденный). Корни комплексны и вещественная часть не нулевая – фокус, а если вещественная часть равна нулю – центр.

10. Напомнить (в смысле – задача) как вычисляется и выглядит экспонента от жордановой клетки умноженной на t: верхнетреугольная матрица с коэффициентами $(t^k/k!)e^{\lambda t}$

Следствие. Если λ_i корни характеристического многочлена (вообще говоря комплексного) оператора A с кратностями ν_i то элементы матрицы e^{At} есть сумма квазимногочленов с показателями λ_i и степенями ν_i.

Для вещественного оператора вещественная и мнимая часть решения является решением (задача)

Пусть λ_k вещественные собственные числа вещественного оператора A с кратностями ν_k, $\lambda_l \pm i\omega_l$ комплексные собственные числа с кратностями μ_l. Тогда каждый элемент матрицы e^{At} и каждая компонента решения является суммой комплексных квазимногочленов с показателями λ_k, $\lambda_l \pm i\omega_l$ и степеней меньше ν_k, μ_l соответственно.

Вещественные формулы для матричных элементов и компонент решения таковы:

$$\sum e^{\lambda_k t} p_k(t) + \sum e^{\lambda_l t}[q_l(t)\cos\omega_l t + r_l(t)\sin\omega_l t]$$

где p_k вещественный многочлен степени меньше ν_k, а степени r_l, q_l меньше μ_l.

Лекция седьмая, 20 октября

Задача. Одно уравнение порядка n

$$x^{(n)} = a_1 x^{(n-1)} + ... + a_n x$$

эквивалентно уравнению (т.е. линейной системе)

$$\dot{v} = Av.$$

Найдите матрицу A. Найдите ее характеристический многочлен – ответ:

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n.$$

0. Экспонента. Уравнение на плоскости с клеткой - повторить и показать или спросить, как получить фазовый портрет предельным переходом.

Дальше – недоговоренное из предыдущей лекции.

10. Напомнить (в смысле – задача) как вычисляется и выглядит экспонента от жордановой клетки умноженной на t: верхнетреугольная матрица с коэффициентами $(t^k/k!)e^{\lambda t}$.

Замечание. Жорданова клетка с собственным числом λ это матрица дифференцирования в пространстве квазимногочленов $e^{\lambda t}p(t)$ с базисом $e^{\lambda t}\frac{t^k}{k!}$. Его экспоненту мы уже считали (где?).

Следствие. Если λ_i корни характеристического многочлена (вообще говоря комплексного) оператора A с кратностями ν_i то элементы матрицы e^{At} есть сумма квазимногочленов с показателями λ_i и степенями меньше ν_i.

Задача. Для вещественного оператора вещественная и мнимая часть решения является решением.

Пусть λ_k вещественные собственные числа вещественного оператора A с кратностями ν_k, $\lambda_l \pm i\omega_l$ комплексные собственные числа с кратностями μ_l. Тогда каждый элемент матрицы e^{At} и каждая компонента решения является суммой комплексных квазимногочленов с показателями λ_k, $\lambda_l \pm i\omega_l$ и степеней меньше ν_k, μ_l соответственно.

Вещественные формулы для матричных элементов и компонент решения таковы:

$$\sum e^{\lambda_k t} p_k(t) + \sum e^{\lambda_l t}[q_l(t)\cos\omega_l t + r_l(t)\sin\omega_l t]$$

где p_k вещественный многочлен степени меньше ν_k, а степени r_l, q_l меньше μ_l

11. Одно уравнение порядка n

$$x^{(n)} = a_1 x^{(n-1)} + ... + a_n x$$

эквивалентно системе уравнений

$$\dot{x} = Ax$$

с матрицей A – над диагональю стоят единицы, в последней строке перевернутые (!!) по порядку коэффициенты характеристического многочлена (a_1 – в конце)

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n.$$

Задачи. Исходное уравнение имеет решение $e^{\lambda t}$ если и только если λ корень этого характеристического многочлена. Его кратность равна размеру клетки. Не может быть двух клеток с одним собственным числом.

Возвратные последовательности это последовательности, удовлетворяющие следующему соотношению

$$x_n = a_1 x_{n-1} + ... + a_k x_{n-k}.$$

Теория возвратных последовательностей очень близка с теорией одного дифференциального уравнения – дифференциальный оператор есть предел дискретного оператора.

Возвратному уравнению тоже сопоставляется многочлен –

$$\lambda^k = a_1 \lambda^{k-1} + ... + a_k.$$

Его корни тоже соответствуют замечательным возвратным последовательностям (каким?).

2. Вернемся к одному линейному уравнению порядка n, но на этот раз неавтономному.

Теорема. Решения уравнения

$$x^{(n)} + a_1(t) x^{(n-1)} + ... + a_n(t) x = 0$$

составляют в C^∞ линейное пространство размерности n.

Сопоставим функции φ ее набор производных $\varphi(0), D\varphi(0), (D^2\varphi)(0), ..., (D^{n-1}\varphi)(0)$ получим отображение из пространства решений в $\mathbb{C}^n$, это отображение линейно, а образ его все. Т.к. по теореме существования такое решение есть. Ядро этого отображения равно нулю по теореме единственности.

Если $\lambda_1, ..., \lambda_k$ корни характеристического многочлена, а $\nu_1, ..., \nu_k$ их кратности, то каждое решение уравнения единственным образом записывается в виде суммы многочленов с показателями λ_i и степенями меньше ν_i.

3. Неоднородные уравнения. Пусть уравнение

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + ... + a_n(t)x + b(t) = 0.$$

Сформулируйте теорему, обобщающую предыдущую.

Задача. Пусть все коэффициенты постоянны и добавленный член $b(t)$ это квазимногочлен с известными степенями и показателями. Как решать такое уравнение?

Задача. Сформулируйте и решите аналогичную задачу для возвратных последовательностей.

Устойчивость положений равновесия

Рассмотрим векторное поле

$$\dot{x} = v(x), v(0) = 0.$$

Положение равновесия 0 называется устойчивым (или устойчивым по Ляпунову), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что решение с начальным условием $|\varphi(0)| < \delta$ продожается на всю положительную полуось и не выходит за ϵ-сферу с центром в нуле.

От этого отличается определение асимптотической устойчивости: которая есть устойчивость по Ляпунову плюс решения с достаточно малым начальным условием стремятся в ноль.

Задачи. Определить устойчивость нулевого решения следующих уравнений $\dot{x} = 0$, $\dot{x} = \pm x$, $\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -x_1 \end{cases}$, $\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 \\ \dot{x_2} = -x_2 \end{cases}$, $\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -\sin x_1 \end{cases}$.

Рассмотрим гладкое векторное поле $v(x)$, $v(0) = 0$. Разложим v в сумму $v_1 + v_2$, где $v_1(x) = Ax$ – линеаризация поля v.

Теорема об устойчивости по первому приближению. Пусть все собственные числа оператора A лежат в левой полуплоскости, т.е. их вещественные части отрицательны. Тогда положение равновесия асимптотически устойчиво.

Лемма. Пусть A вещественный линейый оператор, все собственные числа которого имеют положительную вещественную часть. Тогда найдется положительно определенная квадратичная форма Q, что $L_{Ax}Q > 0$ (при $x \neq 0$).

Лемма верна и в более общем случае. Пусть A комплексный оператор $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ с положительными вещественными частями собственных чисел. Тогда найдется такая положительно определенная квадратичная вещественная форма, что ее производная Ли по Ax есть положительно определенная квадратичная форма.

Если собственные числа некратные, то в качестве такой квадратичной формы можно взять $\sum z_k \bar{z}_k$, где z_i собственные координаты. А если кратные, то сопоставить близкий базис чтоб все внедиагональные коэффициенты были малы и применить ту же форму $\sum z_k \bar{z}_k$, что и раньше.

Доказательство теоремы. Выберем положительноопределенную квадратичную форму Q так что $L_{Ax}Q < 0$ при всех ненулевых x. Функция $L_{Ax}Q$ тоже есть квадратичная форма. Следовательно (почему?), для подходящей положительной константы c

$$L_{Ax}Q(x) \leq -2cQ(x)$$

при всех x. С другой стороны, функция $L_{v_2}Q(x)$ мала по сравнению с $Q(x)$, то есть в некоторой окрестности нуля

$$|L_{v_2}Q(x)| \leq cQ(x).$$

Следовательно, в некоторой окрестности нуля

$$L_vQ(x) \leq -cQ(x).$$

Вдоль траекторий поля v функция Q убывает (если начальное условие достаточно мало). Поэтому решения (с достаточно малыми начальными условиями) продолжаются на все $t > 0$. Более того,

$$Q(\varphi(t)) \leq Q(\varphi(0))e^{-ct}$$

при $t > 0$. Поэтому

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$$

если начальное условие $\varphi(0)$ достаточно мало.

Лекция восьмая, 27 октября

Интегральные поверхности поля направлений. Пусть V – гладкое поле направлений на многообразии M. Гладкое подмногообразие называется интегральным, если его касательное пространство содержит V.

Теорема 1. Y интегральное тогда и только тогда, когда вместе с каждой своей точкой содержит интервал интегральной кривой, проходящей через эту точку.

Задача. Докажите теорему 1.

Пусть $\Gamma \subset M$ k-мерное подмногообразие. Задача Коши для поля направлений V с начальным многообразием Γ это задача об отыскании $(k+1)$-мерного интегрального многообразия, содержащего Γ. Точка многообразия Γ называется характеристической в поле направлений V, если $V \subset T\Gamma$ в этой точке.

Теорема 2. Существование и единственность решения задачи Коши в окрестности нехарактеристической точки.

Задача. Сформулируйте строго и докажите теорему 2.

Линейное однородное уравнение первого порядка.

Так называется уравнение на функцию f вида:

$$L_v f = 0.$$

В координатах

$$v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

По другому – это определение первого интеграла для v.

Задача Коши состоит в следующем: есть векторное поле v, функция φ задана на гиперповерхности (начальной), мы хотим продолжить ее в (хотя бы) окрестность этой поверхности так, что полученная гладкая функция f есть решение уравнения

$$L_v f = 0.$$

Теорема 3. Существование и единственность решения задачи Коши в окрестности нехарактеристической точки этой гиперповерхности.

Задача. Сформулируйте строго и докажите теорему 3.

Указание-план: в нехарактеристической точке вектор векторного поля v не равен нулю. Можно выпрямить поле v диффеоморфизмом так, чтобы поле v записывалось в виде $\frac{\partial}{\partial x_1}$, а гиперповерхность имела вид $x_1 = 0$. При этом наше уравнение будет иметь такой вид:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0.$$

Линейное неоднородное уравнение первого порядка.

Это уравнение такого вида:

$$L_v f = h,$$

где v и h данные векторное поле и функция, а функция f неизвестна.

В координатах оно выглядит так:

$$v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = h.$$

Функция f тоже задана на гиперповерхности.

Теорема 4. Задача Коши для этого уравнения имеет единственное решение в достаточно малой окрестности нехарактеристической точки. Это решение задается формулой:

$$f(g(x,t)) = \varphi(x) + \int\limits_0^t h(g(x,\tau))d\tau.$$

Тут $g(x,t)$ значение решения φ уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием $\varphi(0) = x$ (x – точка гиперповерхности) в момент времени t.

Квазилинейное уравнение первого порядка.

Это уравнение на функцию u, заданную на области (многообразии) M

$$L_\alpha u = \beta$$

где $\alpha(x) = a(x, u(x))$, $\beta(x) = b(x, u(x))$. Точка x – точка многообразия M, u – функция на M. В координатах

$$a_1(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + a_n(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x, u).$$

Пример. Поле скоростей u среды из невзаимодействующих частиц удовлетворяет уравнению:

$$uu_x + u_t = 0$$

Скорость каждой частицы постоянна, обозначим скорость частицы находящейся в момент t в точке x через $u(x, t)$. Уравнение Ньютона: ускорение частицы равно нулю. Если $x = \varphi(t)$ – движение частицы то $\dot{\varphi} = u(\varphi(t), t)$ и

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\dot{\varphi} + \frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Характеристики квазилинейного уравнения первого порядка.

Это такое уравнение на неизвестную функцию u:

$$L_{a(x,u(x))}u = b(x, u(x)).$$

Главное наблюдение состоит в следующем – если точка x выходит из x_0 со скоростью $a(x_0, u_0)$ то решение выходит из u_0 со скоростью $b(x_0, u_0)$.

Рассмотрим вектор в $M \times \mathbb{R}$ с компонентой $a(x_0, u_0)$ вдоль M и $b(x_0, u_0)$ вдоль $\mathbb{R}$. Это характеристический вектор квазилинейного уравнения первого порядка, эти вектора задают уравнение характеристик, их решения называются характеристиками.

Задача. Вычислить характеристики для уравнения из прошлого примера.

Теорема 5 График решения квазилинейного уравнения является интегральной поверхностью его характеристического поля направлений.

Задача. Докажите теорему 5.

Дифференциальные формы

Пусть есть открытое множество $M \subset \mathbb{R}^n$. Векторное поле v – это такой объект: каждой точке $x \in M$ сопоставлен вектор $v(x) \in T_x M^n$, обычно мы рассматриваем гладкие векторные поля, это можно определить так: для разложения

$$v(x) = v_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + ... + v_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

векторного поля v по базисным векторным полям $\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}$ все функции $v_1, ..., v_n$ являются гладкими. Можно определить иначе: векторное поле v гладкое, если для любой гладкой функции f функция $L_v f$ (производная Ли функции f вдоль векторного поля v) тоже гладкая.

Задача. Докажите, что сформулированные определения гладкости эквивалентны.

Теория дифференциальных уравнений изучает и другие дифференциальные объекты. Мы рассмотрим, для начала, дифференциальные 1-формы.

Если векторное поле это элемент касательного пространства $T_x M$, зависящий от точки $x \in M$, то дифференциальная 1-форма α это элемент $\alpha(x)$ пространства $T_x^* M$, двойственного касательному пространству $T_x M$, гладко зависящий от точки $x \in M$. Тут гладкость надо понимать следующим образом: для любого гладкого векторного поля v функция $x \mapsto \alpha(x)(v(x))$ является гладкой. Дифференциальные 1-формы можно, таким образом, спаривать с векторными полями и получать функции.

Для каждой точки $x \in M$ векторное пространство $T_x M^n$ обладает базисом $\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}$ (который правильнее, но длиннее, было бы обозначать $\frac{\partial}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$. Следовательно, двойственное пространство $T_x^* M$ – которое называется кокасательным пространством в точке x – обладает двойственным базисом, который принято обозначать $dx_1, ..., dx_n$ (хотя правильнее, но длиннее, было бы его обозначать $dx_1(x), ..., dx_n(x)$). Этот базис определен соотношениями $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$.

Дифференциальную 1-форму α можно разложить в каждой точке по этому базису:

$$\alpha(x) = a_1(x)dx_1 + ... + a_n(x)dx_n$$

и на первый взгляд дифференциальные 1-формы очень похожи на векторные поля – их тоже можно умножать на гладкие функции и складывать (то есть они образуют модуль над кольцом гладких функций).

Задача. Рассмотрим отображение

$$F\colon Vect(M) \to C^\infty(M),$$

удовлетворяющее условию $F(fv) = fF(v)$ для всех функций $f \in C^\infty(M)$ и векторных полей $v \in Vect(M)$. Верно ли, что для такого отображения F найдется дифференциальная 1-форма α, что $F(v)(x) = \alpha(x)(v(x))$?

Напомним, что в линейной алгебре векторному пространству V (над полем $\mathbb{R}$) сопоставляют пространства внешних форм $\Lambda^k(V)$, элементы которого являются функциями на $V \times V \times ... \times V$ (k сомножителей), которые линейны по каждому аргументу (это определение тензорной k-формы) и обращаются в нуль при совпадении любых двух аргументов (это условие выделяет внешние формы из тензорных форм).

Задача. Вспомните почему размерность $\dim \Lambda^k(V)$ равна $C^k_{\dim V}$.

Дифференциальной k-формой ω на M называется элемент $\omega(x) \in \Lambda^k(T_xM)$, гладко зависящий от $x \in M$, то есть функция

$$x \mapsto \omega(x)(v_1(x), v_2(x), ..., v_k(x))$$

гладкая при любых гладких векторных полях $v_1, ..., v_k \in Vect(M)$. Множество всех дифференциальных k-форм на M является модулем над кольцом гладких функций $C^\infty(M)$ и обозначается $\Omega^k(M)$. Ноль-формами называют функции на M, $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$.

Касательные векторы при гладком отображении $F\colon M \to N$ "едут в сторону отображения": для вектора $v \in T_x$ вектор $F_*(v)$ лежит в пространстве $T_{F(x)}N$. С векторными полями дело обстоит хуже – из векторного поля на M вообще говоря не получается векторное поле на N, так выйдет если отображение F – диффеоморфизм. Из дифференциальной k-формы ω на N однако же с помощью любого гладкого отображения $F\colon M \to N$ определяется прообраз формы ω при F. Обозначается эта форма как $F^*\omega$ и определяется равенством

$$F^*\omega(x)(v_1, ..., v_k) = \omega(F(x))(F_*v_1, ..., F_*v_k).$$

Над дифференциальными формами можно делать то же самое, что и с внешними формами, например умножать внешним образом, чтобы внешне перемножить две дифференциальные формы нужно перемножить в каждой точке соответствующие внешние формы. Напомним, что внешнее произведение внешних форм $\alpha \in \Lambda^k(V)$ и $\beta \in \Lambda^l(V)$ это внешняя форма

$$\alpha \wedge \beta(v_1, ..., v_{k+l}) = \sum sign(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}\beta(v_{\sigma(k+1)}, ..., v_{\sigma(k+1)}),$$

где суммирование пробегает по всем перестановкам $\sigma \in S_{k+1}$, таким что

$$\sigma(1) < ... < \sigma(k) \quad \sigma(k+1) < ... < \sigma(k+l).$$

Задача. Сколько членов в этой сумме?

Задача. Почему внешнее умножение ассоциативно? Коммутативно ли внешнее умножение?

Задача. Любая гладкая дифференциальная форма записывается однозначно в виде

$$\sum_{i_1<...<i_k} f_{i_1,...,i_k}(x_1, ..., x_n)dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

для соответствующих гладких функций $\{f_{i_1,...,i_k}\}$.

Если есть дифференциальная форма $\omega \in \Omega^k(M)$ и векторное поле $v \in Vect(M)$, то подстановка векторного поля v в ω это дифференциальная $(k-1)$-форма $i_v\omega \in \Omega^{k-1}(M)$, определенная соотношением

$$i_v\omega(v_1, ..., v_{n-1}) = \omega(v, v_1, ..., v_{n-1})$$

для (произвольных) векторных полей $v_1, ..., v_{n-1}$. **Задача.** Чему равно $i_v(\alpha \wedge \beta)$?

Задача. Как вычислять $i_v\omega$? Например, вычислите для $v = x_2^2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}$ и $\omega = x_3dx_1 + x_1^2dx_2 - 3x_2dx_3$ или $\omega = x_3dx_1 \wedge dx_2 + x_1^2dx_2 \wedge dx_3 - 3x_2dx_3 \wedge dx_1$ или $\omega = x_3dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

Наконец, внешнее дифференцирование – оператор d, делающий из k-формы $(k+1)$-форму, проще всего (не значит – лучше!) его определить в координатах: для функции f:

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

а для формы степени $k > 0$ внешнее дифференцирование определяется так:

$$d(\sum_{i_1<...<i_k} f_{i_1,...,i_k}(x_1,...,x_n)dx_{i_1}\wedge...\wedge dx_{i_k}) = \sum_{i_1<...<i_k} df_{i_1,...,i_k}(x_1,...,x_n)\wedge dx_{i_1}\wedge...\wedge dx_{i_k}.$$

Задача. Проверьте, что внешнее дифференцирование коммутирует с прообразом:

$$dF^*\omega = F^*d\omega$$

для любого отображения F и любой дифференциальной формы ω.

Еще одно определение одной важной операции над дифференциальными формами – производная Ли дифференциальной формы вдоль векторного поля. Векторное поле порождает (локально) однопараметрическую группу диффеоморфизмов $\{g_v^t\}$ (определенную при малых t, причем эта малость зависит от точки).

$$L_v\omega = \lim_{t\to 0} \frac{(g_v^t)^*\omega - \omega}{t}.$$

Вообще говоря нет никаких шансов найти явно отображения $\{g_v^t\}$ и вычислить $(g_v^t)^*\omega$. Однако предел найти можно! Более того, в дифференциальной геометрии доказывается "формула Картана":

$$L_v = i_v \circ d + d \circ i_v.$$

Лекция девятая 03 ноября

Векторные поля удобны для задания поля направлений. Дифференциальные 1-формы очень удобны для задания, так называемых распределений (=полей) касательных гиперплоскостей: пусть есть (не равная нулю в рассматриваемой точке, а значит и в окрестности этой точки) дифференциальная 1-форма α. Ее значение в точке $x \in M$ это ковектор $\alpha(x) \in T_x^*M$. Ядро этого ковектора это гиперплоскость в касательном пространстве T_xM. Если есть поле касательных гиперплоскостей ξ, которое удобно задавать как поле ядер 1-формы α, то встает вопрос о существовании так-называемых интегральных гиперповерхностей для ξ. Гладкая гиперповерхность Γ называется интегральной для поля касательных гиперплоскостей, если $T_x\Gamma = \xi(x)|$ в любой точке $x \in \Gamma$.

Задача. Доказать, что у поля гиперплоскостей, определенного 1-формой $dx - ydz$, вообще нет интегральных гиперповерхностей.

Тем замечательнее следующая теорема Фробениуса.

Теорема. Пусть поле касательных плоскостей задано как поле ядер 1-формы α. Тогда это поле интегрируемо, то есть через каждую точку проходит интегральная гиперповерхность, если и только если

$$\alpha \wedge d\alpha = 0.$$

Представляет несомненный интерес и следующая эквивалентная формулировка этой теоремы. Поле касательных гиперплоскостей можно задать (локально), указав базисные векторные поля $v_1, ..., v_{n-1}$, $\xi(x) = \langle v_1(x), ..., v_{n-1}(x)\rangle$. Тогда это поле интегрируемо, если при любых i, j и точке x $[v_i, v_j](x) \in \xi(x)$

Еще раз о теореме Фробениуса

Пусть в каждой точке x нашего открытого множества $M \subset \mathbb{R}^n$ задана касательная гиперплоскость $\xi(x)$ и эта гиперплоскость "гладко зависит от точки". Такую стуктуру часто называют распределением касательных гиперплоскостей.

Задача. Докажите, что локально, в достаточно-малой окрестности любой точки, найдется такая 1-форма α, что

$$\xi(x) = \operatorname{Ker}(\alpha(x)).$$

Докажите, что глобально таких форм может не быть. Даже локально такая форма α не одна, подойдет любая форма, пропорциональная форме α в каждой точке, то есть, получающаяся умножением на нигде ненулевую функцию.

Другой способ задания нашего распределения ξ это выбрать $n-1$ векторное поле $v_1, ..., v_{n-1}$ и потребовать, чтобы в каждой точке x

$$\langle v_1(x), ..., v_{n-1}(x)\rangle = \xi(x),$$

то есть векторы $v_1(x), ..., v_{n-1}(x)$ это базис в $\xi(x)$. Так всегда можно задать распределение ξ локально, а глобально не всегда (но эти "не всегда"вообще говоря отличаются для заданий с помощью формы и для заданий с помощью векторных полей – почему?).

Подмногообразие $\Gamma^k \subset M$ называется интегральным для распределения ξ, если оно касается этого распределения, т.е.

$$T_x\Gamma^k \subset \xi(x)$$

при любом $x \in \Gamma^k$.

Распределение ξ называется вполне интегрируемым, если через любую точку проходит интегральное многообразие размерности $n-1$.

Оказывается, что начиная с $n=3$ вполне интегрируемые распределения очень редко встречаются, этому неформальному утверждению можно придать строгий смысл, но мы сейчас не будем этим заниматься. Тем не менее, можно сказать сразу же – является распределение вполне интегрируемым или нет. Это можно сделать и на "языке форм"и на "языке векторных полей".

Теорема Фробениуса. Пусть поле касательных плоскостей ξ задано как поле ядер 1-формы α. Тогда это поле вполне интегрируемо если и только если

$$\alpha \wedge d\alpha = 0.$$

Задача. Докажите (независимо от теоремы Фробениуса), что это условие одновременно справедливо для всех 1-форм, задающих ξ.
Задача. Докажите, что условие $\alpha \wedge d\alpha = 0$ эквивалентно условию $d\alpha|_{\xi(x)} = 0$. То есть, фактически, условие в теореме Фробениуса это условие на 2-форму, а не на 3-форму.

Вопрос. Верно ли, что формы $d\alpha|_{\xi(x)}$ и $df\alpha|_{\xi(x)}$ пропорциональны с ненулевым коэффициентом (f ненулевая функция)? Тут мы не предполагаем, что ξ вполне интегрируемо.

До обсуждения доказательства теоремы Фробениуса обсудим задачу из прошлой лекции – у распределения двумерных плоскостей, заданных 1-формой, $dz - ydx$ в трехмерном пространстве с координатами x, y, z, нет ни одного двумерного интегрального многообразия (даже маленького кусочка). Докажем это от противного – если бы такое интегральное многообразие бы было, то оно являлось бы локально графиком функции от x, y (почему?), то есть $z = f(x, y)$. Значит, $df - ydx = 0$ (это условие касания нашего распределения ξ), а значит, тем более и $d(df - ydx) = 0$, но $d(df - ydx) = dy \wedge dx$ нигде ненулевая 2-форма.

План доказательства теоремы Фробениуса. Доказательство теоремы Фробениуса основано на следующей идее, на следующей конструкции. Пусть есть (непонятно откуда взявшееся) интегральное подмногообразие Γ^k размерности k у распределения ξ и точка $x_0 \in \Gamma^k$. И пусть еще есть векторное поле (тоже непонятно откуда взявшееся) v в окрестности точки x_0, лежащее в ξ и трансверсальное Γ^k в точке $x_0 \in \Gamma^k$. То есть, $v(x) \in \xi(x)$ при всех x из некоторой окрестности точки x_0 и $v(x_0) \notin T_{x_0}\Gamma^k$. Напомню, что мы предполагаем справедливым условие теоремы Фробениуса. В такой ситуации (возможно в меньшей окрестности) можно построить интегральное многообразие Γ^{k+1} для ξ размерности на единицу больше, содержащее исходное интегральное многоообразие Γ^k и такое, что в каждой своей точке $x \in \Gamma^{k+1}$ вектор $v(x)$ касается Γ^{k+1}, то есть $v(x) \in T_x\Gamma^{k+1}$. Более того, такое Γ^{k+1} локально единственно (любые два таких многообразия совпадают в некоторой окрестности точки x_0). Построить такое многообразие Γ^{k+1} очень просто – надо взять объединение интервалов фазовых кривых поля v, проходящих через v. Условие же из теоремы Фробениуса нужно для того, чтобы показать, что это многообразие Γ^{k+1} интегрально (если условие теоремы Фробениуса не выполнено, то вообще говоря Γ^{k+1} не обязано быть интегральным) –

Задача. Приведите для распределения $dz - ydx = 0$ пример интегрального многообразия Γ^1, векторного поля v, трансверсального Γ^1 и лежащего в $dz - ydx = 0$, что Γ^2 неинтегральное и явно построено.

Таким образом, приведенное рассуждение позволяет повысить размерность интегрального многоообразия на 1. Чтобы его применить снова нужно взять другое векторное поле, поскольку v уже касается построенного интегрального многообразия. Это можно сделать (как?). Так, стартуя с самого простого интегрального многообразия Γ^0 – точки x_0, индуктивно доходим до интегральной гиперповерхности Γ^{n-1}, проходящей через x_0.

О том что делать в случае неинтегрируемого распределения гиперплоскостей. Распределение касательных плоскостей бывает интегрируемо, как мы видели, это эквивалентно выполнению условия

$$\alpha \wedge d\alpha = 0$$

для задающей это распределение 1-формы. Это условие эквивалентно тому (была такая задача), что при любом x (из области определения формы α)

$$d\alpha|_{\alpha(x)=0} = 0.$$

То есть, можно сказать, что за за интегрируемость отвечает внешняя два-форма (а именно $d\alpha|_{\alpha(x)=0}$).

Определение. Распределение касательных гиперплоскостей ξ на нечетномерном многообразии размерности $2n + 1$ называется контактной структурой, если задающая (локально) его форма α такова, что

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n(x) \neq 0$$

при любом x.

Задача. Это условие равносильно невырожденности 2-формы $d\alpha|_{\alpha(x)=0}$. Невырожденность внешней 2-формы a это то, что для любого ненулевого вектора v, отыщется вектор ξ, такой что $a(v, \xi) \neq 0$.

Задача. Свойство структуры быть контактной не зависит от выбора 1-формы α локально задающей эту структуру.

Задача. Условие

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n(x) \neq 0$$

эквивалентно условию невырожденности $d\alpha|_{\alpha(x)=0}$.

Немного о симплектической геометрии

Симплектическое векторное пространство это векторное пространство с симплектической структурой – невырожденной кососимметричной 2-формой a. Это определение очень похоже на определение евклидова пространства – пространства со скалярным произведением. Поэтому симплектическую структуру иногда называют кососкалярным произведением. И первая теорема симплектической геометрии очень похожа на первую теорему евклидовой геометрии – симплектические пространства определяются своей размерностью: если (и только если) размерности двух симплектических пространств совпадают, то найдется изоморфизм, переводящий одну симплектическую структуру в другую. Этот результат есть следствие линейной теоремы Дарбу (Жан Гастон Дарбу, 14 августа 1842, Ним — 23 февраля 1917, Париж, французский математик) – в симплектическом пространстве (V, a) есть такой базис $e_1, d_1, e_2, d_2, ..., e_n, d_n$, что при всех i $a(e_i, d_i) = 1$ (и, соответственно, $a(d_i, e_i) = -1$), а значение симплектической структуры на всех остальных парах базисных векторов равно нулю.

Определение. Линейным симплектоморфизмом, называется линейное преобразование между симплектическими пространствами, переводящее одну симплектическую структуру в другую.

Симплектоморфизмы одного и того же симплектического пространства V образуют группу, которая обозначается $Sp(V)$ (или $Sp(2n, \mathbb{R})$).

Задача. Найдите размерность $Sp(2n, \mathbb{R})$ – эта группа является многообразием.

Таким образом, распределение является контактной структурой, если оно есть поле ядер 1-формы α, такой что при каждом x $d\alpha|_{\alpha(x)=0}$ есть симплектическая структура на ядре $\alpha(x)$.

Контактная структура на пространстве 1-струй

Сейчас мы построим замечательную контактную структуру на многообразии 1-струй функций на любом многообразии M. Пространство 1-струй $J^1(M, \mathbb{R})$ есть произведение $T^*M \times \mathbb{R}$ (1-струя функции в точке состоит из ковектора в этой точке и значения). На T^*M определим форму Лиувилля λ так: ее значение в точке

$(p,q) \in T^*M$ (тут $p \in T^*_q M$) на касательном векторе $v \in T_{(p,q)}T^*M$ равно

$$\lambda((p,q))(v) = p(d\pi(v)).$$

Задача. Пусть $q_1, ..., q_n$ координаты на базе и $p_1, ..., p_n$ координаты на кокасательных пространствах – любой ковектор в точке $(q_1, ..., q_n)$ однозначно записывается в виде $p_1 dq_1 + ... + p_n dq_n$. Выписать форму λ в координатах $q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n$ на T^*M.

Пространство 1-струй $J^1(M, \mathbb{R})$ имеет две естественные забывающие проекции $\sigma_1 \colon J^1(M, \mathbb{R}) \to T^*M$ и $\sigma_2 \colon J^1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Пусть u координата на $\mathbb{R}$. Рассмотрим форму

$$\alpha = \sigma_2^* du - \sigma_1^* \lambda$$

на пространстве $J^1(M, \mathbb{R})$.

Задача. Докажите, что α – контактная форма.

Контактная структура на трехмерной сфере

Построим контактную структуру на трехмерной сфере. Трехмерная сфера компактна, потому точно не является пространством 1-струй. Рассмотрим трехмерную сферу

$$S^3 = \{(z_1, z_2) | |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

в двумерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$. Наделим это пространство $\mathbb{C}^2$ евклидовой структурой с помощью нормы $\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$. Рассмотрим отображения $h_\varphi(z) = e^{i\varphi} z$ пространства $\mathbb{C}^2$ в себя при действительных φ.

Задача. Докажите, что отображения h_φ образуют фазовый поток и найдите поле v фазовой скорости этого потока. Докажите, что поле v касается трехмерной сферы S^3.

Контактную структуру на трехмерной сфере можно определить так: взять двумерное подпространство в $T_x S^3$, ортогональное в смысле евклидовой структуры на $\mathbb{C}^2$ вектору $v(x)$ – это $\xi(x)$.

Задача. Докажите, что распределение плоскостей ξ (в точке x плоскость совпадает с jопределенной $\xi(x)$) является контактной структурой.

Лекция десятая 10 ноября

Мы сейчас займемся теорией (нелинейных) дифференциальных уравнений первого порядка. В координатах оно выглядит как

$$F(q_1, ..., q_n, u(q_1, ..., q_n), \frac{\partial u}{\partial q_1}(q_1, ..., q_n), ..., \frac{\partial u}{\partial q_1}(q_1, ..., q_n)) = 0.$$

Тут F данная или заданная функция на $(2n+1)$-мерном пространстве, а u неизвестная функция. Геометрически уравнение это гиперповерхность Γ^{2n} в пространстве струй $J^1(M, \mathbb{R})$.

Немного о симплектической геометрии-2

Нам понадобится еще немного симплектической линейной алгебры. Напомним, что симплектическим линейным пространством мы называем конечномерное пространство V, снабженное кососимметричной невырожденной 2-формой ω. По линейной теореме Дарбу такое пространство обязательно четномерно и единственно – два линейных симплектических пространства одной размерности (V_1, ω_1) и (V_2, ω_2) обязательно переводятся одно в другое симплектоморфизмом, т.е. отображением $A\colon V_1 \to V_2$, таким что $A^*\omega_2 = \omega_1$.

В этом смысле симплектическая геометрия похожа на евклидову (если забыть такую досадную мелочь, что "длина"каждого вектора равна нулю). В евклидовом пространстве все линейные подпространства автоматически евклидовы, в симплектической геометрии это не так – при ограничении на подпространство условие невырожденности может нарушиться. Например, любое одномерное подпространство не будет симплектическим (как и любое нечетномерное подпространство), и даже ограничение на него симплектической структуры равно нулю. Можно не рассматривать подпространства нечетной размерности, памятуя о том, что симплектическая структура бывает только на четномерных пространствах, но и это не поможет – не любое четномерное подпространство симплектического пространства будет симплектическим пространством (с индуцированной 2-формой конечно).

Задача. Рассмотрим действие симплектической группы на грассмановом многообразии $G(2n, k)$ линейных подпространств размерности k в симплектическом пространстве V^{2n}, оператор A переводит подпространство L в $A(L)$. Опишите, сколько у этого действия орбит.

Нас будут интересовать как раз подпространства, ограничение на которые симплектической структуры равно нулю.

Определение. Подпространство L симплектического пространства (V, ω) называется *лагранжевым* если (1) ограничение на это подпространство симплектической структуры ω равно нулю, (2) его размерность равна n.

Задача. Докажите, что размерность любого изотропного подпространства (т.е. такого, что ограничение симплектической формы равно нулю) не больше n.

Задача. Докажите, что любое лагранжево пространство переводится в любое другое лагранжево пространство симплектоморфизмом.

Задача. Лагранжевы пространства образуют многообразие размерности $\frac{n(n+1)}{2}$. Это многообразие называется лагранжевым грассманианом или лагранжевым многообразием Грассмана и обозначается через Λ_n

Контактная геометрия.

Рассмотрим контактное многообразие размерности $2n+1$: M^{2n+1} с контактной структурой ξ. Напомним, что его подмногообразие L называется интегральным (относительно ξ), если для любой точки $x \in L$ его касательная плоскость T_xL содержится в контактной плоскости $\xi(x)$. Если контактная структура задана 1-формой α, то условие интегральности есть

$$\alpha|_L = 0.$$

Покажем, что размерность интегрального многообразия не больше n. Если бы распределение было не контактным, а интегрируемым, то через каждую точку проходило бы $2n$-мерное интегральное многообразие.

Действительно, многообразие интегральное, следовательно $\alpha|_L = 0$. Следовательно, $d\alpha|_L = 0$. Таким образом, $T_xL \subset \mathrm{Ker}\alpha(x)$ есть изотропное подпространство. А его размерность не больше n.

Интегральное подмногообразие L контактного многообразия (M^{2n+1}, ξ) называется *лежандровым*, если его размерность равна n. Лежандровы многообразия есть и их довольно много. Вот пример:

Задача. Доказать, что для функции $f \in C^\infty(M)$ его 1-струйное расширение или 1-график $j^1 f$ – многообразие, точками которого являются 1-струи функции f, оно автоматически лежит в $J^1(M, \mathbb{R})$ – является лежандровым многообразием.

Задача. Доказать, что если лежандрово многообразие в $J^1(M, \mathbb{R})$ является (локально) гладким сечением расслоения $J^1(M, \mathbb{R}) \to M$, то оно совпадает (локально) с 1-графиком некоторой функции f на M.

Полезно следующее утверждение, называемое контактной теоремой Дарбу: контактная стуктура локально единственна. То есть, если взять два контактных многообразия и отметить в каждом из них по точке, то найдется диффеоморфизм некоторой окрестности одной точки на некоторую окрестность другой точки, переводящий одну контактную структуру в другую.

Задача. Пусть контактная структура задана 1-формами α и β. Как мы видели в задаче это значит, что 2-формы $d\alpha(x)|_{\xi(x)}$ и $d\beta(x)|_{\xi(x)}$ невырождены, то есть являются симплектическими структурами на $\xi(x)$. Докажите, что, более того, эти две формы пропорциональны.

Симплектическая геометрия чуть-чуть.

Симплектической структурой на четномерном мнообразии M называется невырожденная замкнутая 2-форма ω на нем. Лагранжевым многообразием называется такое подмнообразие половинной размерности, что ограничение симплектической структуры равно нулю. Самый простой пример симплектического многообразия – $\mathbb{R}^{2n}$ с формой $\sum dp_i \wedge dq_i$ и он сразу обобщается до произвольного кокасательного расслоения с формой $d\lambda$ (где λ – форма Лиувилля).

Есть симплектический аналог теоремы Дарбу – симплектические многообразия одной размерности устроены одинаково, можно в каждом выбрать (локально) координаты $p_1, .., p_n, q_1, .., q_n$ так что симплектическая форма запишется в них как $\sum dp_i \wedge dq_i$.

Симплектическая и контактная геометрия – объемные интересные науки, мы только чуть-чуть их коснулись.

Гиперповерхность в контактном многообразии.

Пусть в лежандровом многообразии (M^{2n+1}, ξ) есть гладкая гиперповерхность Γ^{2n}. Ее точка $x \in \Gamma^{2n}$ называется нехарактеристической, если касательное пространство $T_x\Gamma^{2n}$ и плоскость контактной структуры $\xi(x)$ трансверсальны. Множество нехарактеристических точек открыто в Γ. Для гиперповехности общего положения множество характеристических точек дискретно. Все точки гиперповерхности Γ не могут быть характеристическими, так как интегральных гиперповерхностей у контактной структуры нет.

Сейчас мы определим *характеристическое поле направлений* на нехарактеристических точек. гиперповерхности Γ. Зададим контактную структуру (локально) как поле ядер 1-формы α. Тогда форма $d\alpha(x)|_{\xi(x)}$ симплектическая структура на $\xi(x)$. Пусть x нехарактеристическая точка гиперповерхности Γ. Тогда

$$P(x) = T_x\Gamma^{2n} \cap \xi(x)$$

является гиперплоскостью в $\xi(x)$. У ограничения $d\alpha(x)|_{P(x)}$ есть одномерное ядро (докажите!) $l(x) \subset P(x)$. Это ядро мы и называем *характеристическим направлением.* Интегральные кривые поля l называются *характеристиками* Γ

Задача. Направление $l(x) \subset T_x\Gamma$ одномерно и не зависит от выбора формы α для его определения.

Задача. Если $n = 1$, то $l(x) = P(x)$.

Пусть интегральное многообразие $N^k \subset \Gamma$ контактной стуктуры проходит через нехарактеристическую точку $x \in Gamma$ и не касается $l(x)$.

Теорема. Объединение характеристик, проходящих через точки многообразия N^k, близкие к x, является (локально) $(k+1)$-мерным интегральным многообразием контактной структуры.

Задача. Доказать эту теорему.

Задача. В пространстве 1-струй $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ гиперповерхность Γ задана уравнением $F(u, p_1, .., p_n, q_1, .., q_n) = 0$. Найти поле характеристических направлений.

Лекция одиннадцатая 17 ноября

Сейчас мы поговорим о некоторых сюжетах имеющих отношение к дифференциальным уравнениям.

Линейные неавтономные уравнения.

Сначала напомним теорию линейных неавтономных дифференциальных уравнений, то есть уравнений вида:

$$\dot{x} = A(t)x,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$ – оператор (зависящий от времени), то есть операторнозначная функция, которую мы считаем бесконечно гладкой и заданной на связном конечном или бесконечном интервале I. Напомню важное утверждение, оно было в задачах одного из листочков:

Задача. Любое решение уравнения $\dot{x} = A(t)x$ однозначно продолжается до решения, определенного на всем интервале I.

Это утверждение вытекает (например) из того, что решения нашего уравнения не могут слишком быстро расти и "убегать на бесконечность" за конечное время. Следовательно, такое (зафиксированное!) решение пересечет границу достаточно большого цилиндра C_R (это значит, что R – большое число, а числа t_0, t_1 зафиксированы, $[t_0, t_1] \subset I$)

$$C_R = \{x||x| \leq R\} \times \{t|t_0 \leq t \leq t_1\}$$

только при $t = t_{0,1}$. Следовательно, оно должно быть определено при всех $t \in [t_0, t_1]$ и, следовательно, при всех $t \in I$.

Такие максимально продолженные решения образуют векторное пространство, – их можно складывать и умножать на числа, при этом они остаются решениями нашего уравнения. Пространство решений изморфно $\mathbb{R}^n$ изоморфизм, строится так: зафиксируем $t_0 \in I$, сопоставим решению φ его значение в точке t_0. Конечно, надо проверить, что это отображение корректно определено и является изоморфизмом. Обозначим этот изоморфизм f_{t_0}.

Для любых $t_0, t_1 \in I$ рассмотрим отображение $B_{t_0}^{t_1} = f_{t_1} \circ f_{t_0}^{-1}, B_{t_0}^{t_1} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. (Это отображение похоже на отображение фазового потока, только надо помнить, что в случае неавтономного уравнения никакого потока нет.) Это отображение очень полезно в следующем очень важном случае периодических линейных дифференциальных уравнений $\dot{x} = A(t)x$, где $I = \mathbb{R}$ и при всех t: $A(t) = A(t+T)$ (T – период). Такое уравнение (линейное неавтономное и периодически зависимое от времени) возникает как уравнение в вариациях вдоль периодического решения автономного (!) дифференциального уравнения $\dot{z} = v(z)$.

Задача. Докажите, что для любых $t, t_0 \in \mathbb{R}$ операторы $B_{t_0}^{t_0+T}$ и B_t^{t+T} сопряжены.

Из свойств оператора B_0^T (или любого другого B_t^{t+T}) вытекают свойства нулевого решения линейного дифференциального уравнения. Например, нулевое решение периодического линейного дифференциального уравнения ассимптотически устойчиво при $t \to +\infty$ если и только если $(B_0^T)^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Фундаментальная система решений, теорема Лиувилля.

Возьмем несколько решений $\varphi_1, ..., \varphi_k$ дифференциального уравнения $\dot{x} = A(t)x$.

Задача. Если векторы $\varphi_1(t_0), ..., \varphi_k(t_0)$ линейно независимы, то и при всех t векторы $\varphi_1(t), ..., \varphi_k(t)$ линейно независимы.

Фундаментальной системой решений называется базис в линейном пространстве (максимальнопродолженных) решений. Мы доказали, что размерность этого пространства равна n, построив его изоморфизм с $\mathbb{R}^n$. Пространство $\mathbb{R}^n$ обладает выделенным упорядоченным базисом, следовательно в нем можно считать ориентированный обьем параллилепипедов полной размерности. Если есть n функций $f_1, ..., f_n$ (определенных на некотором множестве) со значениями в $\mathbb{R}^n$, то имеет смысл рассмотреть ориентированный объем параллилепипеда натянутого на векторы $f_1(t), ..., f_n(t)$. Этот объем $W(f_1, ..., f_n)(t)$ равен определителю матрицы, первый столбец которой равен $f_1(t)$, второй столбец равен $f_2(t)$ итд. **Задача.** Приведите пример n линейно-независимых функций со значениями в $\mathbb{R}^n$ на прямой, определитель Вронского которых тождественно равен нулю. Пусть $\varphi_1, ..., \varphi_n$ – фундаментальная система решений уравнения $\dot{x} = A(t)x$.

Задача. Докажите, что определитель Вронского фундаментальной системы решений уравнения $\dot{x} = A(t)x$ никогда не обращается в ноль.

Оказывается, определитель Вронского $W(t)$ фундаментальной системы решений уравнения $\dot{x} = A(t)x$ удовлетворяет замечательному уравнению на прямой:

$$\dot{W} = (\mathrm{tr} A(t))W.$$

Это утверждение называется теоремой Лиувилля.

Задача. Докажите теорему Лиувилля.

Раздутие

Для изучения поведения траекторий векторного поля около неподвижной точки можно использовать, например, полярные координаты в случае плоскости и какие-нибудь их обобщения в случае пространств большего числа измерений. Прямые обобщения не очень удобны, сейчас мы расскажем другой путь.

Сейчас мы объясним, что такое "раздутие векторного пространства в нуле". Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$. Мы построим гладкое многообразие M^n и его отображение $\sigma\colon M^n \to \mathbb{R}^n$ так что (1) отображение

$$\sigma|_{\sigma^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})}$$

есть диффеоморфизм между $\sigma^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ и $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; (2) прообраз нуля $\sigma^{-1}(0)$ диффеоморфен проективному пространству $\mathbb{R}P^{n-1}$. Грубо говоря M^n получается из $\mathbb{R}^n$ выкидыванием одной точки – нуля и "вклеиванием вместо нее" целого проективного пространства $\mathbb{R}P^{n-1}$. Явно это делается так: в произведении $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}P^{n-1}$ рассмотрим множество Γ, состоящее из всех пар (x, l), таких что $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $x \in l \in \mathbb{R}P^{n-1}$.

Задача. Докажите, что Γ подмногообразие в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}P^{n-1}$, диффеоморфное $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Подмногообразие Γ не замкнуто в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}P^{n-1}$ (полезно разобрать случай $n = 2$).

Задача. Замыкание $\bar{\Gamma} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}P^{n-1}$ является гладким многообразием размерности n. Рассмотрим ограничение проекции $\mathbb{R}^n \times$

$\mathbb{R}P^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ на $\bar{\Gamma}$. Покажите, что ограничение этой проекции удовлетворяет тем свойствам, что мы хотим от отображения σ.

Если есть векторное поле на $\mathbb{R}^n$, то можно ограничить его на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и рассмотреть поле $d\sigma^{-1}(v)$ на Γ.

Задача. Пусть ноль неподвижная точка векторного поля v, $v(0) = 0$. Тогда поле $d\sigma^{-1}(v)$ однозначно продолжается до гладкого векторного поля $\bar{v}$ на $\bar{\Gamma}$. Это поле касается вклеенного проективного пространства $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Многообразие $\bar{\Gamma}$ устроено интереснее векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Если векторное поле v (на плоскости, при $n = 2$) было задано функциями $P(x, y)$ и $Q(x, y)$: $v = P(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$, то векторное поле $\bar{v}$ в координатах x, $u = x/y$ на $\bar{\Gamma}$ задается функциями $P(x, ux)$ и $(Q(x, ux) - uP(x, ux))/x$.

Пример. Рассмотрите пример поля $v = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$.

Вопрос. Что соответствует нулям ограничения $\bar{v}$ на вклеенное пространство?

Лекция двенадцатая 24 ноября
Теорема Штурма.

Рассмотрим линейное неавтономное дифференциальное уравнение второго порядка на прямой такого вида:

$$\ddot{x} + q(t)x = 0.$$

Его решения удовлетворяют замечательным свойствам (не)колеблемости и перемежаемости, что уже хорошо заметно при постоянной (не зависящей от времени) функции q. Если она положительная, то решение есть линейная комбинация синуса и косинуса и между двумя решениями одного лежит ноль решения другого (непропорционального) решения. Если эта константа q отрицательная, то любое решение есть линейная комбинация $e^{\sqrt{q}t}$ и $e^{-\sqrt{q}t}$, а у такой (нетривиальной) комбинации не больше двух нулей.

Задача. Докажите, что нетривиальная линейная комбинация n экспонент $e^{\lambda_i t}$ с разными показателями λ_i имеет не больше $n-1$ нуля.

Теорема Штурма о перемежаемости. Пусть f и g два непропорциональных ненулевых решения уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$. Пусть $t_0 < t_1$ нули решения f. Тогда интервал $]t_0, t_1[$ содержит ноль решения g.

План доказательства. Рассмотрим соответствующее векторное поле на плоскости $(x, \dot{x}) = (x, y)$. Это векторное поле системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= -q(t)x.\end{aligned}$$

Оно инвариантно относительно растяжений как любое линейное (пусть и неавтономное) векторное поле. Вообще говоря, эта система уравнений зависит от времени и от функции q, но ее поведение вдоль прямой $x = 0$ одинаково для всех уравнений и не зависит от времени. Это простое, но совершенно ключевое для этой теоремы соображение.

Нулям решения исходного уравнения соответствуют моменты пересечения траектории системы на плоскости с вертикальной прямой

$x = 0$. Посмотрев на векторное поле (конечно это задача!) видно, что траектории системы пересекают вертикальную то через один луч с началом в нуле, то через второй, по очереди. В частности, нули ненулевого решения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ лежат дискретно.

Рассмотрим прямую $l_f(t)$, проходящую через точку $(f(t), f'(t))$ и точку 0. Эта прямая движется непрерывно и никогда не совпадает с прямой $l_g(t)$. Между соседними нулями решения f она повернется на угол π. Мы будем считать, что t_0 и t_1 соседние нули решения f.

Рассмотрим угол $\alpha(t)$, отсчитываемый от положительного вертикального луча по часовой стрелке до прямой $l_f(t)$, так что $\alpha(t_0) = 0$ и $\alpha(t_1) = \pi$. Обозначим через $\beta(t)$ угол, отсчитываемый от положительного вертикального луча по часовой стрелке до прямой $l_g(t)$, так что $0 < \beta(t_0) < \pi$. Если два решения системы пропорциональны в какой-то момент времени, то они пропорциональны всегда (докажите). Следовательно, $\beta(t) > \alpha(t)$ и $\alpha(t) + \pi > \beta(t)$ при всех $t \in [t_0, t_1]$. Следовательно, на интервале $]t_0, t_1[$ угол $\beta(t)$ обратится в π, то есть прямая $l_g(t)$ станет вертикальной, то есть g обратится в ноль.

Задача. Пусть $Q(t) > q(t)$ при всех t. Рассмотрим ненулевое решение уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ с нулями t_0 и t_1. Докажите, что на интервале $]t_0, t_1[$ найдется нуль любого решения уравнения $\ddot{x} + Q(t)x = 0$.

Замечания. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\ddot{x} + q(t)x = 0$. Это уравнение индуцирует семейство линейных отображений (изоморфизмов) $A(t)$ плоскости в себя и соответствующее линейное векторное скоростей $B(t) = \frac{d}{dt}A(t)(x)$. Каждый линейный изоморфизм можно проективизовать (как и векторное поле) и мы получим семейство проективных преобразований проективной прямой и векторное поле на проективной прямой – поле скоростей этих проективных преобразований.

Задача. Напишите формулу для этого векторного поля на проективной прямой, выразите его через $q(t)$.

В терминах этого векторного поля вопрос о нулях решения трансформируется в вопрос о проходах решения через одну выделенную точку на $\mathbb{R}P^1$. И теорема Штурма вытекает из следующей простой теоремы про векторные поля на окружности.

Теорема. Пусть $v(t)$ гладкое векторное поле на окружности. Пусть P точка окружности такая, что $v(t)(P) \neq 0$ при всех t. Пусть $x(t)$ траектория векторного поля $v(t)$, проходящая через точку P в моменты $t_0 < t_1$ (т.е. $x(t_0) = x(t_1) = P$). Тогда любая другая (максимальнопродолженная) траектория этого векторного поля пройдет через точку P при $t \in]t_0, t_1[$.

Задача. Реализуйте эту программу.

Индекс векторного поля.

В этом рассказе много общей топологии, которую мы не поясняем. Рассмотрим гладкое векторное поле $v = \sum v_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ в $\mathbb{R}^n$. Выберем и зафиксируем в $\mathbb{R}^n$ компактное подмножество K, являющееся замыканием множества своих внутренних точек, множество граничных точек которого есть $n-1$-мерное многообразие ∂K. Например, замкнутый шар в евклидовой метрике есть компакт такого вида, а замкнутый куб нет.

Мы будем считать (то есть потребуем), что векторное поле v не обращается в ноль на ∂K. Это не очень обременительное требование – произвольное гладкое векторное поле можно "немного пошевелить" так, чтобы это условие выполнялось. Второе требование, которое мы сейчас сформулируем, таково. Мы утверждаем что у векторного поля "общего положения" нули лежат дискретно. В компакте K, поэтому, их конечное число.

Скажем, что нуль векторного поля *невырожден*, если определитель его линеаризации в этом нуле ненулевой. Назовем знак этого определителя (т.е. число ± 1) индексом этого нуля. У векторного поля общего положения все нули невырождены. Однако, если векторное поле непрерывно деформировать, то будут встречаться поля с вырожденными нулями.

Теорема. Пусть v_0 и v_1 два векторных поля не обращаются в ноль на ∂K. Пусть они перетягиваются одно в другое в классе таких полей, то есть есть непрерывно зависящее от параметра $t \in [0, 1]$ семейство векторных полей $\{v_t\}$ с концами в v_0 и v_1. Если все нули (лежащие в K) полей v_0 и v_1 невырождены, то сумма их индексов для v_1 равна сумме их индексов для v_0.

Эта теорема родственна такой теореме.

Теорема. Пусть M компактное n-мерное многообразие, v – векторное поле на нем. Пусть все нули этого векторного поля невырождены. Тогда сумма их индексов не зависит от векторного поля v.

Эту сумму индексов можно посчитать и она окажется равна эйлеровой характеристике многообразия M.

Лекция тринадцатая 1 декабря

Мы будем рассматривать особую точку векторного поля. Этой точкой будет ноль.

Естественная постановка вопроса такова: есть пространство векторных полей, обращающихся в ноль в начале координат. На этом пространстве действует группа диффеоморфизмов сохраняющих начало координат, диффеоморфизм g переводит векторное поле v в $g_* v$. Спрашивается, к какому хорошему (простому, удобному итп) виду можно привести векторное поле? Родственные и хорошо знакомые конечномерные ситуации – на операторах $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ действует группа GL_n сопряжениями или на операторах $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ действует произведение групп $GL_k \times GL_n$ или на квадратичных формах действует ортогональная группа.

Уже на этом этапе видно что пространство и группа не единственны – поля (и диффеоморфизмы) могут быть (например) бесконечно гладкими, а могут быть аналитическими. Мы рассмотрим третий вариант – мы будем рассматривать не настоящие гладкие или аналитические векторные поля, а "формальное" векторное поле или соответствующее дифференциальное уравнение.

Итак, мы имеем дело с дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = v(x),$$

где $v(x)$ формальный степенной ряд (он, конечно, сходится при $x = 0$ и равен нулю, но вне нуля ничего неизвестно). Любое бесконечно-гладкое векторное поле индуцирует такое формальное уравнение – в качестве формального ряда нужно вместо векторного поля взять его ряд Тейлора в нуле.

Задача. Есть ли такое бесконечно-гладкое векторное поле на прямой, что его ряд Тейлора равен $\sum n! x^n$?

На этом пространстве действует группа формальных диффеоморфизмов, сохраняющих ноль. Формальный диффеоморфизм это ряд вида $Bx + ...$, где B невырожденный оператор, а многоточие обозначает ряд из членов старшей степени – в нем сначала идут члены второй степени, потом третьей итд. Членов каждой степени конечное число (сколько?). Такие формальные диффеоморфизмы образуют группу относительно формальной композиции.

Теорема Пуанкаре

Рассмотрим случай формального векторного поля

$$v(x) = Ax + ...$$

от n переменных с комплексными коэффициентами. Пусть все собственные числа матрицы A разные. Набор ее собственных чисел $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ называется резонансным, если при каком-то k

$$\lambda_k = \sum a_i \lambda_i,$$

где все числа a_i целые неотрицательные и $\sum a_i \geq 2$.

Задача. Резонансный ли набор собственных чисел $(3, 2)$? А $(-2, 2)$?

Теорема Пуанкаре. Если у формального векторного поля $\dot{x} = Ax + ...$ набор собственных чисел линейной части нерезонансный, то формальным диффеорфизмом $x = y + ...$ его можно привести к линейному уравнению $\dot{y} = Ay$.

Или так: в нерезонансном случае теорема Пуанкаре говорит, что все члены старших порядков можно "убить".

Доказательство. Вместо того, чтобы пытаться "поправить сложное уравнение" будем "портить простое". А именно, что произойдет с уравнением $\dot{y} = Ay$ при замене $x = y + h(y)$, где h полиномиальное отображение степени $r \geq 2$, у которого нет нулевого члена и членов первых степеней? Все решает вычисление: проверьте, что при такой замене уравнение превратится в

$$\dot{x} = Ax + (\frac{\partial h}{\partial x}Ax - Ah(x)) + ...,$$

где многоточия обозначают члены порядка выше r.

Определение. Рассмотрим выражение в скобках, назовем его $L_A h$. Гомологическим уравнением называется уравнение

$$L_A h = v.$$

Оказывается, гомологическое уравнение можно решить (относительно h) в пространстве степенных рядов при некоторых естественных предположениях об операторе A (которые пока что выглядят несколько загадочно в условии теоремы). Дело в том, что оператор L_A естественно диагонализуется.

Делается это так: рассмотрим собственный базис $\{e_1, .., e_n\}$ оператора A, обозначим координаты в этом базисе $(x_1, .., x_n)$. Через x^m обозначим моном $(m_1, .., m_n)$. Отображение одночлен (одна, k-я координата ненулевая) $x^m e_k$ является собственным вектором, его собственное число есть

$$(m, \lambda) - \lambda_k.$$

Задача. Докажите это.

Пусть исходное уравнение $\dot{x} = Ax + v_r(x) + ...$, где v_r – члены порядка $r \geq 2$, а многоточие обозначает – члены старшего порядка. Решим гомологическое уравнение $L_A h_r = v_r$, сделаем замену переменных $x = y + h_r(y)$. После этой замены уравнение превратится в $\dot{y} = Ay + v_{r+1}(y) + ...$, где члены степени выше 1 начинаются с $(r + 1)$ степени. Эту процедуру нужно продолжать, меняя r. В итоге получим последовательность замен переменных. Оказывается (докажите), произведение этих замен хорошо определено в классе формальных рядов.

Каждая из этих замен полиномиальна, но их произведение уже есть формальный ряд, сходимость которого (в какой либо точке) требует дальнейшего изучения.

Определение. Резонансной плоскостью в пространстве $\mathbb{C}^n$ (пространство всевозможных наборов собственных чисел) называется гиперплоскость, заданная уравнением $\lambda_k = (m, \lambda)$, все m_i неотрицательные целые числа и их сумма не меньше двух.

Этих гиперплоскостей счетное число, мера каждой гиперплоскости равна нулю. Следовательно, дополнение до этих гиперплоскостей всюду плотно. Более того, резонансы встречаются "редко".

Областью Пуанкаре называется подмножество $\mathbb{C}^n$ такое, что точка $(\lambda_1, .., \lambda_n)$ принадлежит ему, если выпуклая оболочка чисел λ_i не содержит нуля.

Теорема Пуанкаре. Если собственные числа линейной части голоморфного векторного поля нерезонансны и принадлежат области Пуанкаре, то поле в окрестности нуля приводится к своей линейной части биголоморфной заменой переменных.