

Задача 1. Нарисуйте векторные поля на плоскости: $y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, $x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$, $x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y}$ какое из них переводится в другое диффеоморфизмом плоскости?

Задача 2. Докажите, что диффеоморфизм g переводит решения дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x)$ в решения дифференциального уравнения $\dot{y} = g_*v(y)$.

Задача 3. Может ли образ (бесконечно) гладкого пути совпадать с кривой, имеющей изломы (например, с графиком модуля на плоскости)? Может ли траектория однопараметрической группы диффеоморфизмов иметь изломы?

Задача 4. Найти фазовые потоки векторных полей $v(x)$ на прямой:

а) $v(x) = 0$;

б) $v(x) = -1$;

в) $v(x) = 2x - 1$,

г) на интервале $] -\pi/2, \pi/2[$, $v(x) = \cos(x)$.

Задача 5. Найти фазовые потоки векторных полей на плоскости а) $v(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x}$; б) $v(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$; в) $v(x, y) = \sin y \frac{\partial}{\partial x}$.

Задача 6. Рассмотрим преобразования g^t пространства многочленов степени не выше данной:

$$g^t p(x) = p(x + t).$$

Являются ли эти преобразования фазовым потоком? Если являются, то найдите скорость этого потока.

Задача 7. Запишите систему в полярных координатах:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

Решите ее, нарисуйте образы решений в исходных и полярных координатах. Все ли решения продолжаются неограниченно на положительное (отрицательное) время?