# ЛЕКЦИЯ 2

Аннотация. Сингулярные гомологии: определение и простейшие свойства.

Стандартным $n$-мерным симплексом называется подмножество $\Delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_0, \dots, x_n) \mid x_0, \dots, x_n \geq 0, x_0 + \dots + x_n = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Подмножество $\Delta_{n,i} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta_n \mid x_i = 0\}$, $0 \leq i \leq n$, называется гранью (номер $i$, размерности $n-1$). Грань аффинно эквивалентна $(n-1)$-мерному стандартному симплексу: биективное аффинное отображение $\iota_{i,n} : \Delta_{n-1} \to \Delta_{n,i}$ действует по формуле $\iota_{i,n}(y_0, \dots, y_{n-1}) = (y_0, \dots, y_{i-1}, 0, y_i, \dots, y_{n-1})$ (нуль вставляется на $i$-м месте).

$n$-мерным сингулярным симплексом в топологическом пространстве $X$ называется непрерывное отображение $f : \Delta_n \to X$. Пространством $n$-мерных сингулярных цепей с коэффициентами в кольце $R$ называется свободный $R$-модуль $C_n(X, R)$, порожденный всеми $n$-мерными сингулярными симплексами в $X$. Пространством $n$-мерных сингулярных коцепей $C^n(X, R)$ называется $R$-модуль, состоящий из всех гомоморфизмов $C_n(X, R) \to R$.

Символом $\partial_n^X : C_n(X, R) \to C_{n-1}(X, R)$ обозначается гомоморфизм модулей, сопоставляющей образующей $C_n(X, R)$ — сингулярному симплексу $f : \Delta_n \to X$ — сингулярную цепь

$$\partial_n^X f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f \circ \iota_{i,n}.$$

Символом $d_X^n : C^n(X, R) \to C^{n+1}(X, R)$ обозначается сопряженный гомоморфизм $(\partial_{n+1}^X)^*$, действующий по правилу $d_n^X(\alpha)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(\partial_{n+1}^X(x))$, где $x \in C_{n+1}(X, R)$ — произвольная $(n+1)$-мерная сингулярная цепь, а $\alpha \in C^n(X, R)$ — образующая, то есть гомоморфизм $C_n(X, R) \to R$. Гомоморфизмы $\partial_n$ и $d^n$ называются, соответственно, операторами границы и кограницы.

**Теорема 1.** $\partial_n^X \circ \partial_{n+1}^X = 0$.

Для доказательства нам потребуется

**Лемма 2.** *Если* $0 \leq t \leq s \leq n+1$, *то* $\iota_{t,n+1} \circ \iota_{s,n} = \iota_{s+1,n+1} \circ \iota_{t,n}$,

доказательство которой — несложное упражнение.

*Доказательство теоремы 1.* $\partial_n^X(\partial_{n+1}^X(f)) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_n^X(f \circ \iota_{i,n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i+j} f \circ \iota_{i,n} \circ \iota_{j,n-1}$. Согласно лемме, все члены в сумме разбиваются на пары подобных: $(i, j)$ и $(j+1, i)$, где $i \leq j$; при этом два члена пары входят в сумму с противоположным знаком. □

**Следствие 3.** $d_X^{n+1} \circ d_X^n = 0$.

**Определение 4.** Компле́ксом (точнее, цепным комплексом модулей, ограниченным справа нулем) называется последовательность модулей и гомоморфизмов

$$\dots \xrightarrow{\partial_2} A_2 \xrightarrow{\partial_2} A_1 \xrightarrow{\partial_1} A_0 \to 0,$$

для которой выполнено равенство из теоремы 1 — иными словами, для всякого $i \geq 0$ выполнено включение $B_i \subseteq Z_i$, где $Z_i \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Ker} \partial_i \subset A_i$ называется модулем $i$-мерных циклов, а $B_i \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Im} \partial_{i+1} \subset A_i$ — модулем $i$-мерных границ. Фактор-модуль $H_i(A) = Z_i / B_i$ называется модулем $i$-ых гомологий комплекса.

Аналогично вводится понятие коцепного комплекса, ограниченного нулем слева:

$$0 \to A_0 \xrightarrow{d^0} A_1 \xrightarrow{d^1} A_2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

и его *когомологий* $H^i(A) = Z^i / B^i$, где $Z^i \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Ker} d^i$ (*коциклы*) и $B_i \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Im} d^{i-1}$ (*кограницы*). Мы будем для краткости говорить просто "(цепной) комплекс" и "коцепной комплекс".

Тем самым теорема 1 означает, что пространства сингулярных цепей и операторы границы образуют цепной комплекс, называемый сингулярным цепным комплексом топологического пространства $X$ и обозначаемый $C_\cdot(X)$; пространства сингулярных коцепей и операторы кограницы образуют сингулярный коцепной комплекс $C^\cdot(X)$. Модули $H_i(X, R)$ называются $i$-мерными сингулярными гомологиями пространства $X$ ($H^i(X, R)$ — сингулярными когомологиями).

*Пример* 1. Пусть $X$ — пространство, состоящее из одной точки. В этом случае для всякого $n$ существует единственный сингулярный $n$-мерный симплекс, так что $C_n(X, R) = R$ для любого $n \geq 0$. Оператор $\partial_n^X$ : $R \to R$ сопоставляет единице кольца $R$ сумму единиц с чередующимися знаками; количество слагаемых равно количеству $(n-1)$-мерных граней симплекса, то есть $n+1$. Тем самым $\partial_n^X = 0$, если $n$ нечетно, и $\partial_n^X = \mathrm{id}$, если $n$ четно (проверьте, что именно id, а не $-\mathrm{id}$, то есть сумма знаков равна $+1$; впрочем, для вычисления гомологий это неважно).

Тем самым сингулярный комплекс пространства имеет вид

$$\dots \xrightarrow{0} R \xrightarrow{1} R \xrightarrow{0} R \to 0,$$

Непосредственное вычисление показывает, что $H_0(X) = R$ (ср. ниже пример 2) и $H_i(X) = 0$ при $i > 0$; для когомологий ответ такой же.

*Пример* 2. Стандартный нульмерный симплекс $\Delta_0$ — точка, а $\Delta_1$ — отрезок на плоскости, соединяющий точки $(0,1)$ и $(1,0)$. Тем самым нульмерный сингулярный симплекс в топологическом пространстве $X$ — точка этого пространства $a \in X$ (формально, отображение, переводящее единственную точку $1 \in \Delta_0$ в точку $a$), а одномерный сингулярный симплекс — непрерывная кривая $f : \Delta_1 \to X$, соединяющая точки $f((0,1))$ и $f((1,0))$. Граничный гомоморфизм действует по правилу $\partial_1^X f = f((0,1)) - f((1,0))$. Отсюда вытекает (почему?), что если сингулярная 0-цепь $x \stackrel{\text{def}}{=} k_1 a_1 + \dots + k_n a_n \in C_0(X, R)$ принадлежит образу гомоморфизма $\partial_0^X$, то для каждой компоненты линейной связности $Y \subset X$ пространства $X$ сумма коэффициентов $k_i$ по тем $i$, где $a_i \in Y$, равна нулю.

Верно и обратное. Действительно, пусть для какая-то компонента $Y \subset X$ содержит точки $a_1, \dots, a_m$ (пронумеруем их для удобства последовательно), и $k_1 + \dots + k_m = 0$. Соединим точку $a_m$ с остальными (ясно, что $m > 1$) кривыми $f_1, \dots, f_{m-1}$: каждый раз $f_i((0,1)) = a_i$ и $f_i((1,0)) = a_m$. Тогда коэффициент при $a_1, \dots, a_{m-1}$ в 0-цепи $x' \stackrel{\text{def}}{=} x - \partial_1^X(k_1 f_1 + \dots + k_{m-1} f_{m-1})$, очевидно, равен $k_i - k_i = 0$, а коэффициент при $a_m$ равен $k_m + (k_1 + \dots + k_{m-1}) = 0$. Тем самым цепь $x'$ не содержит точек в компоненте $Y$. Повторяя этот процесс для всех компонент пространства $X$, содержащих какие-нибудь точки $a_i$, найдем 1-цепь $\varphi$ такую, что $x - \partial_1^X \varphi = 0$.

Пусть теперь $Z(X)$ — свободный $R$-модуль, порожденный компонентами линейной связности пространства $X$. Рассмотрим гомоморфизм модулей $\varepsilon : C_0(X, R) \to Z(X)$, заданный формулой $\varepsilon(k_1 a_1 + \dots + k_n a_n) = b_1 Y_1 + \dots + b_m Y_m$, где $Y_1, \dots, Y_m$ — компоненты линейной связности, а каждый коэффициент $b_i$ равен сумме $k_j$ по тем индексам $j$, для которых $a_j \in Y_i$. Ядро $\varepsilon$ совпадает, как доказано, с образом гомоморфизма $\partial_1^X$, а его образ, очевидно, — весь модуль $Z(X)$, откуда $H_o(X, R) = C_0(X, R)/\operatorname{Im} \partial_1^X = C_0(X, R)/\operatorname{Ker} \varepsilon = Z(X)$. Тем самым получено описание нулевых гомологий произвольного топологического пространства.

**Упражнение 5.** Докажите, что $H^0(X, R) = \operatorname{Hom}(Z(X), R)$, то есть множество функций на множестве компонент линейной связности $X$ со значениями в $R$. Покажите, что если количество компонент пространства $X$ конечно, то модули $H_0(X, R)$ и $H^0(X, R)$ изоморфны, а если бесконечно, то нет.

**Упражнение 6.** Придумайте определение гомологий, в котором вместо сингулярных симплексов используются сингулярные кубы — непрерывные отображения $f : [-1, 1]^n \to X$. Придумайте определение гомоморфизмов $\partial_n^{X,Q}$, докажите равенство $\partial^2 = 0$ и вычислите гомологии пространства, состоящего из одной точки. Также попробуйте доказать аналог утверждения из примера 2.

*Замечание.* Если вы решили упражнение 6, то выяснили, что построенные "кубические" гомологии точки не совпадают с сингулярными. Этот недостаток можно исправить и построить теорию сингулярных гомологий с помощью сингулярных кубов. Но это исправление нетривиально — при правильном определении модуль сингулярных кубических цепей не совпадает со свободным модулем, порожденным сингулярными кубами. Поэтому мы в дальнейшем будем использовать более простое "симплициальное" определение.

**Определение 7.** Пусть $A$, $B$ — комплексы $R$-модулей. Морфизмом комплексов $f : A \to B$ называется набор гомоморфизмов модулей $f_n : A_n \to B_n$, для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \xrightarrow{\partial_{n+1}^A} & A_n & \xrightarrow{\partial_n^A} & A_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}^A} & \dots \\
 & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\
\dots & \xrightarrow{\partial_{n+1}^B} & B_n & \xrightarrow{\partial_n^B} & B_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}^B} & \dots
\end{array}$$

коммутативна — иными словами, $f_{n-1} \circ \partial_n^A = \partial_n^B \circ f_n$ для всякого $n \geq 1$.

Если $g : B \to C$ — другой морфизм комплексов, то композиция $g \circ f$ (почленная: $(g \circ f)_n \stackrel{\text{def}}{=} g_n \circ f_n$) является, очевидно, морфизмом. Для каждого комплекса $A$ имеется тождественный морфизм $\mathbf{1}_A : A \to A$, обладающий свойством единицы: $\mathbf{1}_A \circ f = f \circ \mathbf{1}_B = f$. Иными словами, комплексы $R$-модулей и их морфизмы образуют категорию; то же самое верно (убедитесь и уточните!) и для коцепных комплексов.

Для произвольного непрерывного отображения $u : X \to Y$ топологических пространств рассмотрим гомоморфизм модулей $u_{\#,n} : C_n(X,R) \to C_n(Y,R)$, действующий на образующие композицией: если $f : \Delta_n \to X$ — сингулярный $n$-симплекс, то $u_{\#,n}(f) = u \circ f : \Delta_n \to Y$ (сингулярный $n$-симплекс, то есть образующая $C_n(Y,R)$); поскольку $C_n(X,R)$ — свободный модуль, это определяет гомоморфизм $u_{\#,n}$ однозначно.

**Лемма 8.** *Набор гомоморфизмов $u_{\#,n}$, $n = 0, 1, \dots$, является морфизмом комплексов $u_\# : C.(X,R) \to C.(Y,R)$. Если $v : W \to X$ — другое непрерывное отображение, то $(u \circ v)_\# = u_\# \circ v_\#$.*

*Доказательство.* Достаточно проверить равенство $(u_{\#,n-1} \circ \partial_n^X)(f) = (\partial_n^Y \circ u_{\#,n})(f)$, где $f : \Delta_n \to X$ — произвольный сингулярный симплекс. Действительно, $u_{\#,n-1}(\partial_n^X f) = \sum_{i=0}^n (-1)^i u_{\#,n-1}(f \circ \iota_{i,n}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i u \circ f \circ \iota_{i,n} = \partial_n^Y (u \circ f) = \partial_n^Y (u_{\#,n}(f))$.

Второе равенство очевидно. □

Иными словами, сопоставление $X \mapsto C(X,R)$ и $f \mapsto f_\#$ — функтор из категории топологических пространств в категорию комплексов.

**Упражнение 9.** Придумайте аналог морфизма $u_\#$ и леммы 8 для коцепного сингулярного комплекса.

Пусть $f : A \to C$ — морфизм комплексов, и пусть $x \in Z_i(A)$, то есть $x \in A_i$ и $\partial x = 0$. Тогда $\partial f(x) = f(\partial x) = f(0) = 0$ (напомним, что $f$ — гомоморфизм модулей), то есть $f(x) \in Z_i(C) \subset C_i$. Аналогично, если $x \in B_i(A)$, то есть $x = \partial y$, то $f(x) = \partial f(y) \in B_i(C)$. Тем самым $f(Z_i(A)) \subset f(Z_i(C))$ и $f(B_i(A)) \subset f(B_i(C))$, что позволяет определить гомоморфизм модулей $f_{*,i} : H_i(A) = Z_i(A)/B_i(A) \to Z_i(C)/B_i(C) = H_i(C)$ естественным образом: если $x \in Z_i(A)$ — представитель класса $h \in H_i(A)$, то $f(x) \in Z_i(C)$ — представитель класса $f_*(h) \in H_i(C)$.

**Теорема 10.** *Класс $f_*(h)$ корректно определен, то есть не зависит от выбора представителя $x$ класса $h$. Отображение гомологий $f_{*,n} : H_n(A) \to H_n(C)$ является гомоморфизмом модулей и обладает свойством $(g \circ f)_{*,n} = g_{*,n} \circ f_{*,n}$, где $g : C \to D$ — другой морфизм комплексов. Иными словами, соответствие $A \mapsto H_n(A)$ и $f \mapsto f_{*,n}$ — функтор из категории комплексов в категорию $R$-модулей..*

**Упражнение 11.** Докажите теорему и сформулируйте ее аналог для когомологий.