ЛЕКЦИЯ 4

Аннотация. Последовательность Майера–Виеториса — примеры применения и частичное доказательство того, что гомологии комплекса “малых” симплексов совпадают с сингулярными.

Теорему 8 лекции 3 мы докажем позднее, а пока приведем несколько примеров применения следствия 9.

Пример 1. Пусть $X = S^1$, $A = S^1 \setminus \{a\}$, $B = S^1 \setminus \{b\}$, где $a, b \in S^1$ — две различные точки. Тогда A и B гомотопически эквивалентны точке (стягиваемы), а $A \cap B$ — двум точкам. В силу гомотопической инвариантности гомологий (доказанной в лекции 3) получаем, что фрагмент последовательности Майера–Виеториса при $n \geq 2$ выглядит так:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(\cdot) \oplus H_n(\cdot) & \longrightarrow & H_n(S^1) & \longrightarrow & H_{n-1}(\cdot\ \cdot) & \longrightarrow & \dots \\ & & \shortparallel & & & & \shortparallel & & \\ & & 0 & & & & 0 & & \end{array},$$

откуда $H_n(S^1) = 0$ (последовательность точная!). Конец последовательности Майера–Виеториса выглядит так:

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow & H_1(\cdot) \oplus H_1(\cdot) & \longrightarrow & H_1(S^1) & \longrightarrow & H_0(\cdot\ \cdot) & \xrightarrow{u} & H_0(\cdot) \oplus H_0(\cdot) & \longrightarrow \\ & \shortparallel & & & & \shortparallel & & \shortparallel & \\ & 0 & & & & \mathbb{Z}^2 & & \mathbb{Z}^2 & \end{array}$$

Согласно описанию отображения u в последовательности Майера–Виеториса, u представляет собой матрицу 2×2, строки которой — отображения $(\iota^A_{A\cap B})_*$ и $(\iota^B_{A\cap B})_*$, то есть $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Из точности последовательности вытекает, что $H_1(S^1) = \operatorname{Ker} u = \mathbb{Z}$ (свободный $\mathbb{Z}$-модуль, порожденный вектором $(1, -1)$).

Пример 2. Пусть теперь $X = S^n$, где $n \geq 1$. В силу линейной связности получим $H_0(X) = \mathbb{Z}$. Докажем индукцией по n, что $H_n(X) = \mathbb{Z}$ и $H_k(X) = 0$ при всех $k \neq 0, n$. Пример 1 составляет базу индукции.

Для доказательства положим $A = S^n \setminus \{a\}$, $B = S^n \setminus \{b\}$, где $a, b \in S^n$ — две различные точки, и рассмотрим последовательность Майера–Виеториса. Очевидно, A и B гомотопически эквивалентны точке, а $A \cap B \sim S^{n-1}$. Тогда фрагмент последовательности Майера–Виеториса при $k \neq n, 0$ выглядит так:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_k(\cdot) \oplus H_k(\cdot) & \longrightarrow & H_k(S^n) & \longrightarrow & H_{k-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & \dots \\ & & \shortparallel & & & & \shortparallel & & \\ & & 0 & & & & 0 & & \end{array},$$

(правое равенство нулю — по предположению индукции), откуда $H_k(S^n) = 0$. Фрагмент при $k = n > 1$ такой:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(\cdot) \oplus H_n(\cdot) & \longrightarrow & H_n(S^n) & \longrightarrow & H_{n-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & H_n(\cdot) \oplus H_n(\cdot) & \longrightarrow & \dots \\ & & \shortparallel & & & & \shortparallel & & \shortparallel & & \\ & & 0 & & & & \mathbb{Z} & & 0 & & \end{array}$$

(равенство $\mathbb{Z}$ снизу — предположение индукции; заметим, что $n - 1 > 0$), откуда $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$, завершая индукцию.

Следствие 3. *Сферы разных размерностей попарно гомотопически неэквивалентны (и, следовательно, не гомеоморфны).*

Заметим, что ранее у нас не было средств доказать этот факт.

Для обоснования всего происходящего необходимо, однако, доказать теорему 8 лекции 3. Это делается с помощью конструкции, называемой барицентрическим подразделением. Обозначим Σ_k группу перестановок n элементов, то есть биекций множества $\{0, \dots, k-1\}$ в себя; $|\Sigma_k| = k!$. Барицентрическим подразделением стандартного симплекса Δ_n называется его разбиение $\Delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\sigma \in \Sigma_{n+1}} \Delta_\sigma$, где $\Delta_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta_n \mid x_{\sigma(0)} \geq \dots \geq x_{\sigma(n)}\}$. Множество Δ_σ — симплекс; отождествим стандартный симплекс с ним посредством отображения $\chi_\sigma : \Delta_n \to \Delta_\sigma$, заданного такими формулами: если $(x_0, \dots, x_n) = \chi_\sigma(y_0, \dots, y_n)$, то

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
x_{\sigma(0)} &= y_0 + \frac{1}{2}y_1 + \dots + \frac{1}{n+1}y_n,\\
x_{\sigma(1)} &= \frac{1}{2}y_1 + \dots + \frac{1}{n+1}y_n,\\
&\dots\\
x_{\sigma(n-1)} &= \frac{1}{n}y_{n-1} + \frac{1}{n+1}y_n,\\
x_{\sigma(n)} &= \frac{1}{n+1}y_n
\end{aligned}
\qquad\iff\qquad
\begin{aligned}
y_0 &= x_{\sigma(0)} - x_{\sigma(1)},\\
y_1 &= 2(x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)}),\\
&\dots\\
y_{n-1} &= n(x_{\sigma(n-1)} - x_{\sigma(n)}),\\
y_n &= (n+1)x_{\sigma(n)}
\end{aligned}
$$

Определим теперь для каждого сингулярного n-симплекса $f : \Delta_n \to X$ сингулярную n-цепь $\beta_n(f) = \sum_{\sigma\in\Sigma_{n+1}}(-1)^\sigma f\circ\chi_\sigma \in C_n(X,R)$ (где, как обычно, $(-1)^\sigma = 1$ для четных перестановок σ и -1 для нечетных) и продолжим β до гомоморфизма $C_n(X,R) \to C_n(X,R)$.

Лемма 4. *Существует цепная гомотопия $K_n : C_n(X,R) \to C_{n+1}(X,R)$, сохраняющая подкомплекс $C^{A,B}(X,R) \subset C(X,R)$ (т.е. $K_n(C_n^{A,B}(X,R)) \subset C_{n+1}^{A,B}(X,R)$) и такая, что $\beta - \mathrm{id} = K\partial + \partial K$.*

Следствие 5. *$\beta_* = \mathrm{id}$ на синулярных гомологиях пространства X.*

Лемму 4 и следствие 5 мы докажем позднее, а пока убедимся, что они нам нужны:

Вывод теоремы 8 лекции 3 из следствия 5. Докажем сначала несколько лемм.

Лемма 6. *Пусть v_1, v_2 — вершины барицентрического подразделения симплекса Δ_n. Тогда ребро, соединяющее эти вершины, можно продлить так, что его длина возрастет по крайней мере в $1+1/n$ раза, но полученный отрезок будет лежать в Δ_n.*

Доказательство. Без ограничения общности рассматриваемый симплекс это $\Delta_{\mathbf{1},n}$ (соответствующий тождественной перестановке $\mathbf{1} \in \Sigma_{n+1}$, и координаты вершин равны $v_1 = (1/p, \dots, 1/p, 0, \dots, 0)$ и $v_2 = (1/q, \dots, 1/q, 0, \dots, 0)$, где $q > p$ (в вершине v_1 есть p ненулевых координат, а в v_2 — q ненулевых координат). Точки на ребре $[v_1, v_2]$ имеют координаты $(1-t)v_1 + tv_2$, $0 \le t \le 1$; продлим это ребро за вершину v_1, положив $0 \le t \le= q/(q-p)$. Тогда координаты точки $(1-t)v_1 + tv_2$ равны либо 0, либо $t/q \ge 0$, либо $t/q + (1-t)/p = (q-(q-p)t)/q \ge 0$, что и означает $(1-t)v_1 + tv_2 \in \Delta_n$. Но $q/(q-p) = 1 + p/(q-p) \ge 1 + 1/(q-p) \ge 1 + 1/n$. □

Следствие 7. *Диаметр симплекса, полученного k-кратным барицентрическим подразделением стандартного симплекса, меньше диаметра стандартного симплекса по крайней мере в $(1+1/n)^k$ раз.*

Доказательство. Пусть $D_1 \subset D_2$ — два симплекса, обладающих свойством, описанным в лемме 6, а A — обратимое аффинное преобразование. Поскольку аффинное преобразование сохраняет отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, симплексы $A(D_1) \subset A(D_2)$ тоже обладают свойством из леммы 6. Отсюда следует, что для любого ℓ этим свойством обладают симплексы $D_1 \subset D_2$, где D_2 — симплекс ℓ-го барицентрического подразделения Δ_n, а D_1 — симплекс, полученный барицентрическим подразделением D_2. Следовательно, диаметр D_1 меньше диаметра D_2 по крайней мере в $1 + 1/n$ раз, и индукция по $\ell \le k$ доказывает следствие. □

Лемма 8. *Для всякой сингулярной цепи $x \in C_n(X,R)$ существует такое натуральное N, что $\beta_n^N(x) \in C_n^{A,B}(X,R)$.*

Доказательство. Цепь x — конечная сумма (с коэффициентами) сингулярных симплексов, поэтому достаточно доказать утверждение леммы в случае, когда $x = f$ — сингулярный симплекс.

Рассмотрим бесконечное дерево T, вершины которого на расстоянии k от корня — симплексы k-кратного барицентрического подразделения Δ_n (корень — сам Δ_n), и две вершины соединены ребром, если один симплекс получается при барицентрическом подразделении (однократном) другого. Валентность корня T равна $(n+1)!$, а всех остальных вершин — на единицу больше.

Назовем вершину D дерева T отмеченной, если $f(D) \subset A$ или $f(D) \subset B$. Если вершина отмечена, то, очевидно, все ее потомки в дереве T тоже отмечены. Из теоремы Тихонова о компактности вытекает теперь, что если неотмеченных вершин в дереве T бесконечно много, то имеется бесконечная последовательность неотмеченных вершин $D_1 \supset D_2 \supset \dots$ (вывод этого утверждения из теоремы Тихонова разбирался на семинарах в прошлом семестре; впрочем, это несложная "олимпиадная" задача сама по себе — решите!).

Поскольку симплекс — компакт, симплексы $D_1 \supset D_2 \supset \dots$ имеют непустое пересечение. Согласно следствию 7, диаметр симплекса D_k не превосходит $\left(\frac{n}{n+1}\right)^k$ и стремится к нулю при $k \to \infty$. Следовательно, пересечение — единственная точка c. Каждый симплекс D_k содержит точку a_k такую, что $f(a_k) \in X \setminus A$ и точку b_k такую, что $f(b_k) \in X \setminus B$; при этом $a_k, b_k \to c$ при $k \to \infty$. Множества $X \setminus A$ и $X \setminus B$ замкнуты, откуда вытекает, что $f(c) \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B) = X \setminus (A \cup B) = \varnothing$ — противоречие, доказывающее лемму. □

Теперь мы готовы доказать теорему 8 лекции 3 (в предположении, что следствие 5 известно — на самом деле мы его докажем позднее). Пусть $x \in C_n(X, R)$, $\partial x = 0$. Согласно лемме 4, при любом N имеем $\partial \beta_*^N x = \beta^N \partial x = 0$ и существует y такое, что $x - \beta^N x = \partial y$, так что x и $\beta^N x$ представляют один и тот же класс гомологий в $C(X, R)$. Из леммы 8 вытекает теперь, что для всякого цикла $x \in C_n(X, R)$ существует $x' \in C_n^{A,B}(X, R)$, представляющий тот же класс гомологий. Тем самым если $\lambda : C^{A,B}(X, R) \to C(X, R)$ — тавтологическое вложение (всякий сингулярный симплекс в $C_n^{A,B}(X, R)$ одновременно является и симплексом в $C_n(X, R)$), то $\lambda_* : H(C^{A,B}(X, R)) \to H(X, R)$ — эпиморфизм.

Докажем теперь, что λ_* — мономорфизм. Пусть $x \in C_n^{A,B}(X, R)$ — цикл, класс гомологий которого лежит в ядре λ_* — иными словами, $x = \partial y$, где $y \in C_{n+1}(X, R)$. Согласно лемме 4, $\partial y = \partial(\beta(y) + K\partial y) = \partial\beta(y) + \partial Kx = \partial y_1$, где $y_1 = \beta(y) + Kx$. Из леммы 4 вытекает, что второе слагаемое лежит в $C_{n+1}^{A,B}(X, R)$. Повторяя эту процедуру несколько раз, получим $\partial y = \partial \beta^N y + \omega_N$ для произвольного N и некоторого $\omega_N \in C_{n+1}^{A,B}(X, R)$. Согласно лемме 8, $\beta^N y \in C_{n+1}^{A,B}(X, R)$ при достаточно большом N. Следовательно, x — граница и в $C_{n+1}^{A,B}(X, K)$, что означает $\operatorname{Ker} \lambda_* = 0$ — λ_* является мономорфизмом. □

Доказательство леммы 4 и следствия 5 мы отложим до следующей лекции.