ЛЕКЦИЯ 6

Аннотация. Степень гладкого отображения сфер.

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ — гладкое отображение, для которого $\varphi(0) = 0$ и матрица $\varphi'(0)$ (состоящая из частных производных $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(0)$ компонент образа $\varphi(x) = (\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x))$ по компонентам прообраза $x = (x_0, \dots, x_n)$) невырождена. Тогда по теореме об обратной функции существует $\varepsilon > 0$ такое, что φ — диффеоморфизм (взаимно однозначное гладкое отображение, обратное к которому тоже гладкое) шара $B_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| \le \varepsilon\}$ на его образ. В частности, образ сферы $\partial B_\varepsilon(0) = S^n_\varepsilon$ не содержит начала координат (это образ начала координат), так что определено и непрерывно отображение $\alpha_\varphi : S^n_\varepsilon \to S^n_\varepsilon$, заданное формулой $\alpha_\varphi(x) = \varepsilon\varphi(x)/|\varphi(x)|$.

Теорема 1. *Степень α_φ равна 1, если $\det \varphi'(0) > 0$, и -1, если $\det \varphi'(0) < 0$.*

Лемма 2. *Для всякого линейного отображения $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ найдется константа $C(A) > 0$ такая, что $|Ax| \le C(A)\,|x|$ для всякого $x \in \mathbb{R}^n$. Если A невырождено, то найдется константа $c(A) > 0$ такая, что $|Ax| \ge c(A)\,|x|$ для всякого $x \in \mathbb{R}^n$.*

Доказательство леммы. Если (a_{ij}) — матрица отображения A в стандартном базисе, то достаточно взять $C(A) = \sum_{i,j} |a_{ij}|$ (докажите!). Если A невырождено, то $|x| = |A^{-1}Ax| \le C(A^{-1})\,|Ax|$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, так что достаточно взять $c(A) = 1/C(A^{-1}) > 0$. □

Доказательство теоремы 1. Обозначим $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ линейное отображение $\psi(x) = \varphi'(0)x$ и докажем, что α_ψ гомотопно α_φ. После этого, очевидно, теорема станет следствием теоремы 8 лекции 5.

По формуле Тейлора $\varphi(x) = \psi(x) + \omega(x)$, где $\lim_{x\to 0} \frac{|\omega(x)|}{|x|} = 0$. Согласно лемме 2, $|\psi(x)| \ge c(\psi)\,|x|$, откуда $\lim_{x\to 0} \frac{|\omega(x)|}{|\psi(x)|} = 0$. Из этого вытекает (убедитесь!), что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и произвольном $0 \le t \le 1$ отображение $\varphi_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(x) + t\omega(x)$ переводит $B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ в себя (т.е. образ не содержит нуля). Следовательно, отображение α_{φ_t} определено при всех t, так что задана гомотопия между $\alpha_{\varphi_0} = \alpha_\psi$ и $\alpha_{\varphi_1} = \alpha_\varphi$. □

Обозначим $S^n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ n-мерную сферу единичного радиуса с центром в начале координат. *Правоориентированная система координат* на S^n это тройка (U, V, ξ), где $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset S^n$ — открытые подмножества, а $\xi : V \to U$ — гомеоморфизм, обладающий следующими свойствами:

1. (гладкость) если обозначить $y = (y_1, \dots, y_n) \in U$ и $\xi^{-1}(y) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0(y), \dots, x_n(y)) \in V \subset S^n$, то функции $x_0, \dots, x_n$ переменных $y_1, \dots, y_n$ гладкие (обладают непрерывными частными производными всех порядков).
2. (ориентация) если $y \in U$, то матрица $(n+1) \times (n+1)$, строки которой — вектор $\xi^{-1}(y) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и $(n+1)$-мерные векторы частных производных $\frac{\partial \xi^{-1}}{\partial y_1}(y), \dots, \frac{\partial \xi^{-1}}{\partial y_n}(y)$, имеет положительный определитель.

Правоориентированным атласом на S^n называется набор правоориентированных карт $(U_\alpha, V_\alpha, \xi_\alpha)$ такой, что $\bigcup_\alpha V_\alpha = S^n$.

Пример 3. Пусть $U_1 = U_2 = \mathbb{R}^n$, $V_1 = \{x \in S^n \mid x_0 \ne 1\}$, $V_2 = \{x \in S^n \mid x_0 \ne -1\}$. Отображения ξ_1 и ξ_2 — стереографические проекции: $\xi_{1,2}(x_0, \dots, x_n) = (\frac{x_1}{1 \mp x_0}, \dots, \frac{x_n}{1 \mp x_0})$ (знак $-$ для ξ_1, а $+$ для ξ_2). Тогда $(U_1, V_1, \sigma \circ \xi_1)$ и (U_2, V_2, ξ_2), где $\sigma_n(y_1, \dots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} (y_1, y_2, \dots, -y_n)$, — правоориентированный атлас из двух карт.

Несложное вычисление показывает, что если $\xi_1^{-1}(y) = (x_0(y), \dots, x_n(y))$, то $x_i(y) = \frac{2y_i}{Y+1}$ при $i = 1, \dots, n$ и $x_0 = \frac{Y-1}{Y+1}$, где $Y \stackrel{\text{def}}{=} y_1^2 + \dots + y_n^2$; для ξ_2 аналогично. Гладкость карты тем самым очевидна (функции $x_i(y)$ — рациональные, и их знаменатель не обращается в нуль); положительность определителя — упражнение.

Лемма 4. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset S^n$ — открытые подмножества, а $\xi : U \to V$ — гомеоморфизм. Пусть также $\varepsilon > 0$. Тогда (U, V, ξ) — правоориентированная карта на S^n тогда и только тогда, когда отображение $X : (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times U \to \mathbb{R}^{n+1}$, заданное формулой $X(y_0, y_1, \dots, y_n) = (1 + y_0)\xi^{-1}(y_1, \dots, y_n)$, является в достаточно малой окрестности любой точки $(0, y) \in \{0\} \times U$ диффеоморфизмом, и определитель матрицы $X'(y)$ положителен (как говорят, X сохраняет ориентацию).*

Доказательство. Имеем $\frac{\partial X}{\partial y_0}(0, y_1, \dots, y_n) = \xi^{-1}(y_1, \dots, y_n)$ и $\frac{\partial X}{\partial y_i}(0, y_1, \dots, y_n) = \frac{\partial \xi^{-1}}{\partial y_i}(y_1, \dots, y_n)$ для $i = 1, \dots, n$. Теперь лемма вытекает (убедитесь!) из теоремы об обратной функции. □

Пусть (U_1, V_1, ξ) и (U_2, V_2, η) — правоориентированные карты на S^n и $V \stackrel{\text{def}}{=} V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$. Ограничения отображений ξ и η на V обозначим опять ξ и η. Тем самым определено взаимно однозначное отображение $\varphi_{\xi\eta} = \eta \circ \xi^{-1} : \xi(V) \to \eta(V)$, при этом $\xi(V) \subset U_1 \subset \mathbb{R}^n$ и $\eta(V) \subset U_2 \subset \mathbb{R}^n$

Следствие 5. *Отображение $\varphi_{\xi\eta}$ — диффеоморфизм, сохраняющий ориентацию.*

Доказательство. Пусть $X(y) \stackrel{\text{def}}{=} (1 + y_0)\xi^{-1}(y_1, \dots, y_n)$ и $H(y) \stackrel{\text{def}}{=} (1 + y_0)\eta^{-1}(y_1, \dots, y_n)$; согласно лемме 4, это локальные диффеоморфизмы. Пусть $z = (z_0, \dots, z_n) = H^{-1}(X(y))$, так что $H(z) = X(y)$. Поскольку $|\xi^{-1}(y_1, \dots, y_n)| = 1 = |\eta^{-1}(y_1, \dots, y_n)|$ для всех y, получим, что $z_0 = y_0$ и $\eta^{-1}(z_1, \dots, z_n) = \xi^{-1}(y_1, \dots, y_n)$, то есть $H^{-1} \circ X = \mathrm{id} \times \eta \circ \xi^{-1}$. Отсюда вытекает, что определители матриц $(H^{-1} \circ X)'(y)$ и $(\eta \circ \xi^{-1})'(y) = \varphi'_{\xi\eta}(y)$ совпадают. Но $\det(H^{-1} \circ X)'(y) = (\det H'(X(y)))^{-1} \det X'(y) > 0$, так как системы координат правоориентированные. □

Пусть X, Y — топологические пространства, $a \in X$, и $U_1, U_2 \subset X$ — открытые подмножества, для которых $a \in U_1 \cap U_2$. Непрерывные отображения $f : U_1 \to Y$ и $f_2 : U_2 \to Y$ называются эквивалентными, если существует открытое множество $U \subset U_1 \cap U_2$, $a \in U$, такое что $f_1(x) = f_2(x)$ для всех $x \in U$. Очевидно, что это действительно отношение эквивалентности; класс эквивалентности называется ростком отображения $X \to Y$ в точке a.

Росток отображения $f : S^n \to S^n$ называется гладким, если для всякой точки $x \in S^n$ и каких-то систем координат (U_1, V_1, ξ), $x \in V_1$, и (U_2, V_2, η), $f(x) \in V_2$, росток $f_{\xi\eta} \stackrel{\text{def}}{=} \eta \circ f \circ \xi^{-1} : U_1 \to U_2$ — гладкий (представляющие его функции имеют непрерывные частные производные всех порядков). Росток $f_{\xi\eta}$ называется "запись f в координатах ξ, η". Если ξ', η' — другие системы координат в окрестностях точек x и $f(x)$, то росток $f_{\xi'\eta'} = \varphi_{\eta\eta'} \circ f_{\xi\eta} \circ \varphi_{\xi'\xi}$ (формула замены координат). Из следствия 5 вытекает теперь, что от выбора систем координат гладкость не зависит: если росток гладкий, то его запись в любых координатах гладкая.

Пусть $f : S^n \to S^n$ — гладкое отображение, $a \in S^n$, (U_1, V_1, ξ), (U_2, V_2, η) — правоориентированные системы координат, $a \in V_1$, $f(a) \in V_2$. Точка a называется положительной, если $\det f'_{\xi\eta}(a) > 0$, отрицательной, если $\det f'_{\xi\eta}(a) < 0$ и критической, если $\det f'_{\xi\eta}(a) = 0$. Для некритических точек a определим их знак: $\mathrm{sgn}(a) = 1$, если a положительна, и $\mathrm{sgn}(a) = -1$, если отрицательна. Из формулы замены координат и следствия 5 вытекает, что знак точки (и то, является ли она критической) не зависит от выбора (правоориентированных) систем координат ξ и η.

Теорема 6. *Пусть $f : S^n \to S^n$ — гладкое отображение. Если множество $f^{-1}(c)$ для некоторой $c \in S^n$ не содержит критических точек, то оно конечно.*

Доказательство. По теореме об обратной функции каждая точка множества $f^{-1}(c)$ изолирована. Если $f^{-1}(c)$ бесконечно, то в силу компактности S^n оно имеет предельную точку a. Одноточечное множество $\{c\} \subset S^n$ замкнуто, а f непрерывна, так что $f^{-1}(c)$ замкнуто — следовательно, $a \in f^{-1}(c)$. Но предельная точка не может быть изолированной. □

Теорема 7. *Пусть $f : S^n \to S^n$ — гладкое отображение. Если $c \in S^n$ такова, что множество $f^{-1}(c) \subset S^n$ не содержит критических точек, то $\sum_{a \in f^{-1}(c)} \mathrm{sgn}(a) = \deg f$.*

Доказательство. Пусть $f^{-1}(c) = \{a_1, \dots, a_N\}$. Согласно теореме об обратной функции существует открытый шар B с центром в точке c, такой что $f^{-1}(B) = B_1 \cup \dots \cup B_N$, где множества B_i попарно не пересекаются, $a_i \in B_i$ и $f|_{B_i} : B_i \to B$ — гомеоморфизм (для каждого i). Рассмотрим покрытие S^n (области определения f) множествами $U_1 = S^n \setminus f^{-1}(c)$ и $V_1 = B_1 \cup \dots \cup B_N$, и покрытие S^n (области значений f) множествами $U_2 = S^n \setminus \{c\}$ и $V_2 = B$. Отображение f переводит одно покрытие в другое и, следовательно, порождает коммутативную диаграмму последовательностей Майера–Виеториса. Множества U_2 и V_2 гомеоморфны шарам и, следовательно, стягиваемы. Множество U_1 (сфера S^n без N точек) гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ без $(N-1)$ точек и гомотопически эквивалентно букету $(N-1)$ сфер размерности $n-1$. Множество V_1 гомеоморфно объединению N шаров и гомотопически эквивалентно дискретному множеству из N точек. Пересечение $U_2 \cap V_2$ гомотопически эквивалентно сфере S^{n-1}; пересечение $U_1 \cap V_1$ — дизъюнктному объединению N сфер S^{n-1}. Поэтому один

из фрагментов коммутативной диаграммы выглядит так:
(1)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z}^N & & \mathbb{Z}^{N-1} & & 0 \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
H_n(U_1)\oplus H_n(V_1) & \to & H_n(S^n) & \xrightarrow{\lambda} & H_{n-1}(S^{n-1}\sqcup\dots\sqcup S^{n-1}) & \xrightarrow{\iota_*} & H_{n-1}(U_1)\oplus H_{n-1}(V_1) & \to & H_{n-1}(S^n) \\
\downarrow 0 & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow 0 & & \\
H_n(U_2)\oplus H_n(V_2) & \to & H_n(S^n) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-1}(S^{n-1}) & \to & H_{n-1}(U_2)\oplus H_{n-1}(V_2) & & \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \\
0 & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & 0 & &
\end{array}$$

Группа $\mathbb{Z}$ имеет две образующих (1 и -1), и для вычислений нужно зафиксировать изоморфизмы, обозначенные вертикальными знаками равенства в каждом месте диаграммы. Поскольку шар B_i маленький, можно считать, что он лежит в некоторой карте $U_i \subset S^n$ с координатой ξ_i; без ограничения общности $U_i = B_i$ (если карта $U_i \supset B_i$ другая, то мы можем просто добавить к атласу карту $U_i' = B_i$, система координат в которой — ограничение отображения ξ_i). Тогда ξ_i^{-1} взаимно однозначно отображает $\xi_i(B_i) \setminus \{\xi_i(a_i)\}$ в $B_i \setminus \{a_i\}$ и тем самым порождает изоморфизм $(\xi_i^{-1})_* : H_{n-1}(\xi_i(B_i)\setminus\{\xi_i(a_i)\}) \to H_{n-1}(B_i\setminus\{a_i\})$. Множество $\xi_i(B_i)\setminus\{\xi_i(a_i)\} \subset \mathbb{R}^n\setminus\{\xi_i(a_i)\}$ деформационно ретрагируется на сферу $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ произвольного радиуса $\varepsilon > 0$ с центром $\xi_i(a_i)$, так что мы можем зафиксировать образующую $\mathbf{1} \in H_{n-1}(\xi_i(B_i) \setminus \{\xi_i(a_i)\})$ раз и навсегда; теперь в качестве образующей $H_{n-1}(B_i \setminus \{a_i\})$ возьмем $r_i \stackrel{\text{def}}{=} (\xi_i^{-1})_*(\mathbf{1})$.

От выбора (правоориентированной) карты ξ_i образующая r_i не зависит. Действительно, если η_i — другая карта в окрестности той же точки a_i, то рассмотрим отображение замены координат $\varphi_{\xi\eta} = \xi_i \circ \eta_i^{-1}$. Согласно следствию 5, $\det \varphi_{\eta\xi}'(\eta_i(a_i)) > 0$, откуда, согласно теореме 1, $\deg \varphi_{\eta\xi} = 1$, то есть $(\varphi_{\eta\xi})_* = \mathrm{id}$. Следовательно, $(\eta_i^{-1})_*(\mathbf{1}) = (\varphi_{\eta\xi})_*(\xi_i^{-1})_*(\mathbf{1}) = r_i$.

Это позволяет зафиксировать изоморфизмы с $\mathbb{Z}^N$, $\mathbb{Z}^{N-1}$ и $\mathbb{Z}$ в третьей и четвертой колонке диаграммы (1). В силу точности последовательности в нижней строке δ — изоморфизм; это позволяет выбрать образующую в $H_n(S^n)$ (т.е. изоморфизм $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ во второй колонке снизу) так, чтобы $\delta = \mathrm{id}$.

Возьмем во второй колонке сверху некоторую образующую s; пусть $\lambda(s) = (d_1, \dots, d_N) \in \mathbb{Z}^N$. Выберем произвольную перестановку $\tau \in \Sigma_N$.

Лемма 8. *Для любых попарно различных точек $a_1, \dots, a_N \in S^n$, где $n > 1$, существует гомеоморфизм $T_\tau : S^n \to S^n$, гомотопный тождественному, переводящий множества U_1 и V_1 (определенные выше) в себя и такой, что $T_\tau(a_i) = a_{\tau(i)}$ для всех $i = 1, \dots, N$.*

Идея доказательства. Очевидно, если теорема верна для перестановок τ_1 и τ_2, то она верна и для их произведения: нужно взять $T_{\tau_1\tau_2} = T_{\tau_2} \circ T_{\tau_1}$. Тем самым достаточно доказать теорему для случая, когда $\tau = (ij)$ — транспозиция.

Соединим точки a_i и a_j окружностью в сфере, не проходящей через остальные точки a_k (докажите, что при $n \geq 2$ это возможно!) и рассмотрим ε-окрестность этой окружности, также не содержащую остальных точек. Окрестность гомеоморфна произведению $S^1 \times \Omega_{n-1}$ окружности на шар $\Omega_{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$, причем исходная окружность есть $S^1 \times \{0\}$. Без ограничения общности будем считать, что точки a_i и a_j соответствтвуют диаметрально противоположным точкам окружности S^1. Тогда T_τ переводит окрестность в себя, производя на каждой окружности $S^1 \times \{x\}$, $x \in \Omega_{n-1}$, поворот на угол $\pi(1 - |x|)$; вне окрестности $T_\tau = \mathrm{id}$. Гомотопия, связывающая T_τ с тождественным отображением — поворот на угол $\pi t(1 - |x|)$, $0 \leq t \leq 1$. $\square$

Из леммы вытекает, что гомоморфизм $(T_\tau)_*$ действует на $H_{n-1}(U_1 \cap V_1) = \mathbb{Z}^N$ перестановкой τ, а на $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ — тождественно (поскольку T_τ гомотопен тождественному отображению). Поскольку гомоморфизм переводит U_1 и V_1 в себя, он порождает коммутативную диаграмму последовательностей Майера–Виеториса

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathbb{Z}^N & & \mathbb{Z} & \\
 & \| & & \| & \\
\dots \to & H_{n-1}(S^{n-1}\sqcup\dots\sqcup S^{n-1}) & \xrightarrow{\lambda} & H_n(S^n) & \to \dots \\
 & \downarrow (T_\tau)_* & & \downarrow \mathrm{id} & \\
\dots \to & H_{n-1}(S^{n-1}\sqcup\dots\sqcup S^{n-1}) & \xrightarrow{\lambda} & H_n(S^n) & \to \dots \\
 & \| & & \| & \\
 & \mathbb{Z}^N & & \mathbb{Z} &
\end{array},$$

из коммутативности которой вытекает, что $\lambda(s) \in \mathbb{Z}^N$ не меняется при произвольной перестановке ее координат, то есть $\lambda(s) = (d, \dots, d)$. Тогда из точности в четвертом столбце сверху коммутативной диаграммы (1) следует, что $\mathbb{Z}^N/\langle(d, \dots, d)\rangle$ изоморфно $\mathbb{Z}^{N-1}$, что означает $d = 1$ или $d = -1$; выберем образующую в $H_n(S^n)$ сверху так, чтобы было $d = 1$.

По определению степени гомоморфизм $f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ на исходной диаграмме является умножением на $\deg f$, действующим $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. По определению знака некритической точки гомоморфизм $f_* : H_{n-1}(S^{n-1} \sqcup \dots \sqcup S^{n-1}) \to H_{n-1}(S^{n-1})$ равен $(\operatorname{sgn}(a_1), \dots, \operatorname{sgn}(a_N))^T$ (имеет матрицу $N \times 1$, i-й элемент которой — знак точки a_i). Утверждение теоремы теперь вытекает из коммутативности центрального квадрата на диаграмме: $1 \cdot \deg f = (1, \dots, 1)(\operatorname{sgn}(a_1), \dots, \operatorname{sgn}(a_N))^T = \operatorname{sgn}(a_1) + \dots + \operatorname{sgn}(a_N)$. $\square$