3. АЛГЕБРА КОМПЛЕКСОВ

Эти задачи следует решать, если интересно и понятна формулировка. При этом на задачу 1 мы в какой-то момент будем ссылаться в лекциях.

Задача 1 (5-лемма)**.** Дана коммутативная диаграмма R-модулей

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{i} & E \\ p\downarrow & & q\downarrow & & r\downarrow & & s\downarrow & & t\downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{i'} & E' \end{array}$$

В этой диаграмме строки — точные последовательности, q и s — изоморфизмы, p — эпиморфизм, t — мономорфизм. Докажите, что r — изоморфизм.

Задача 2 (формула универсальных коэффициентов–1)**.** Последовательность R-модулей $A \xrightarrow{p} B \xrightarrow{q} C \to 0$ точна, а G — R-модуль. а) Докажите, что последовательность $A \otimes_R G \xrightarrow{p\otimes \mathrm{id}} B \otimes_R G \xrightarrow{q\otimes \mathrm{id}} C \otimes_R G \to 0$ — комплекс. б) Обязательно ли эта последовательность точна (т.е. гомологии комплекса нулевые)? А если $R = \mathbb{Z}$ (т.е. модули это абелевы группы)?

Задача 3 (формула универсальных коэффициентов–2)**.** Пусть $\ldots \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$ — комплекс абелевых групп, в котором $C_i = \mathbb{Z}^{k_i}$ для всех i, а $\ldots \xrightarrow{\partial_{i+1}} \tilde{C}_i \xrightarrow{\partial_i} \tilde{C}_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} \tilde{C}_0 \longrightarrow 0$ комплекс векторных пространств, в котором $\tilde{C}_i = \mathbb{R}^{k_i}$ для всех i, а дифференциалы те же самые (задаются теми же матрицами в стандартных базисах). Докажите, что если $H_i(C) = \mathbb{Z}^{\beta_i} \oplus G_i$, где G_i — конечная абелева группа (кручение), то $H_i(\tilde{C}) = \mathbb{R}^{\beta_i}$.

Задача 4 (двойственность)**.** Пусть $\ldots \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$ — цепной комплекс свободных абелевых групп. Рассмотрим последовательность $\ldots \xleftarrow{\partial^*_{i+1}} C^*_i \xleftarrow{\partial^*_i} C^*_{i-1} \xleftarrow{\partial^*_{i-1}} \ldots \xleftarrow{\partial^*_1} C^*_0 \longleftarrow 0$, в котором $C^*_i = \mathrm{Hom}(C_i, \mathbb{Z})$. а) Докажите, что эта последовательность является коцепным комплексом. б) Докажите, что если $H_i(C) = \mathbb{Z}^{\beta_i} \oplus G_i$, где G_i — конечная абелева группа, то $H^i(C^*) = \mathbb{Z}^{\beta_i} \oplus G'_i$, где группа G'_i также конечна. Приведите пример, когда группы G_i и G'_i не совпадают.