6. ГОМОМОРФИЗМ F_*

Задача 1. а) Пусть $f : S^2 \to \mathbb{T}^2$ — непрерывное отображение. Докажите, что $f_* : K = H_2(S^2, K) \to H_2(\mathbb{T}^2, K) = K$ — нулевое отображение. б) Докажите, что существует отображение $g : \mathbb{T}^2 \to S^2$, для которого $g_* : \mathbb{Z} = H_2(S^2, \mathbb{Z}) \to H_2(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ — изоморфизм. в) Тот же вопрос, но гомоморфизм — умножение на произвольное число $d \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. а) Пусть A — матрица 2×2 с целыми матричными элементами. Приведите пример отображения $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, для которого матрица отображения $f_* : \mathbb{Z}^2 = H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$ равна A. б) Докажите, что для любого такого отображения гомоморфизм $f_* : \mathbb{Z} = H_2(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) \to H_2(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ представляет собой умножение на $\det A$.

Замечание. Прежде чем доказывать утверждение пункта 2б, уточните его: что там со знаком?

Задача 3. Пусть отображение $f : X_g \to X_h$ таково, что гомоморфизм $f_* : \mathbb{Z} = H_2(X_g) \to H_2(X_h) = \mathbb{Z}$ ненулевой. Докажите, что $f(X_g) = X_h$.

Задача 4. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \to \mathbb{R}^3$ — узлы, то есть непрерывные вложения (различные точки переходят в различные), образы которых не пересекаются. Отображение $F_{\gamma_1,\gamma_2} : \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 \to S^2$ действует по формуле $F_{\gamma_1,\gamma_2}(u, v) = \frac{\gamma_1(u)-\gamma_2(v)}{|\gamma_1(u)-\gamma_2(v)|}$. Вычислите гомоморфизм $(F_{\gamma_1,\gamma_2})_* : H_2(\mathbb{T}^2) \to H_2(S^2)$, если а) γ_1 — окружность в плоскости xy радиуса 1 с центром в начале координат, γ_2 — окружность радиуса 1 в плоскости yz с центром в точке $(0, 3, 0)$. б) γ_1 — как в пункте 4а, а γ_2 — окружность радиуса 1 в плоскости yz с центром в точке $(0, 1, 0)$.

Задача 5 (алгебраическая лемма)**.** Пусть $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — линейное (над полем $\mathbb{C}$) отображение, а $A_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ — то же самое отображение, но рассматриваемое как линейное над $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$-линейный изоморфизм $\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ переводит $e_k \in \mathbb{C}^n$ (k-ый вектор стандартного базиса) в $e_{2k-1} \in \mathbb{R}^{2n}$, а ie_k — в e_{2k}). Докажите, что $\det A_{\mathbb{R}} = |\det A|^2$.

Как известно (почему?), комплексная проективная прямая $\mathbb{C}P^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\})/(\forall\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\ (z, w) \sim (\lambda z, \lambda w))$ гомеоморфна S^2 и может быть представлена в виде $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Задача 6. Пусть $P(z) = z^d + p_{d-1}z^{d-1} + \cdots + p_0$ — многочлен с комплексными коэффициентами; рассмотрим его как отображение $\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$, где $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, переводящее ∞ в себя. а) Докажите, что отображение P гладкое и каждая некритическая точка его — положительная. б) Докажите, что степень этого отображения равна d. Выведите из этого утверждения основную теорему алгебры: многочлен P обязательно имеет корень. в) Что такое с топологической точки зрения кратность корня a многочлена P? Докажите, что сумма кратностей корней многочлена P равна d. г) Пусть P — а рациональная функция. Продолжите ее до непрерывного отображения $\mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$; чему равна его степень?