9. КОГОМОЛОГИИ И ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА.

Задача 1. а) Докажите, что если R — поле, то $H^k(X,R)$ изоморфно $(H_k(X,R))^* (\stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}(H_n(X,R),R))$. Приведите пример, доказывающий, что при $R=\mathbb{Z}$ это может быть неверно. б) Верно ли, что $H^k(X,R)$ содержит $\operatorname{Hom}(H_n(X,R),R)$ в качестве подмодуля? а в качестве прямого слагаемого?

Задача 2. а) Пусть $0 \to C_0 \to \dots \to C_n \to 0$ — конечный комплекс конечномерных векторных пространств над полем F. Докажите, что все гомологии этого комплекса конечномерны, и $\sum_{k=1}^n (-1)^k \dim H_n(C) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \dim C_n$. б) Верен ли аналог утверждения пункта 2а, если C_k — свободные конечно порожденные абелевы группы ($\mathbb{Z}$-модули), а вместо размерности — ранг абелевой группы (количество слагаемых, равных $\mathbb{Z}$, в стандартном разложении группы в прямую сумму циклических)?

Топологическое пространство назовем “ручным”, если все его гомологии с целыми коэффициентами конечно порождены и только конечное их количество отлично от нуля. Например, любое компактное (то есть состоящее из конечного числа клеток) клеточное пространство — “ручное”. Для ручного пространства X величина $\sum_k (-1)^k \operatorname{rk} H_k(X)$ называется эйлеровой характеристикой.

Задача 3. Пусть X, Y и $X\cap Y$ — “ручные” открытые подмножества топологического пространства Z. Докажите, что $X\cup Y \subset Z$ тоже “ручное” и что $\chi(X\cup Y) = \chi(X)+\chi(Y)-\chi(X\cap Y)$.

Задача 4. а) Докажите, что эйлерова характеристика компактного клеточного пространства равна $\sum_k (-1)^k m_k$, где m_k — количество клеток размерности k. б) Вычислите эйлерову характеристику сферы с g ручками, сферы с n лентами Мебиуса, $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$. в) Докажите, что если M — “ручное” n-мерное многообразие и $a\in M$, то $\chi(M\setminus\{a\}) = \chi(M)+(-1)^{n-1}$. г) Пусть X, Y — компактные клеточные пространства. Докажите, что $\chi(X\times Y)=\chi(X)\chi(Y)$.

Задача 5. а) Пусть X — компактное клеточное пространство и $f: Y\to X$ — n-листное накрытие. Докажите, что $\chi(Y) = n\chi(X)$. б) Докажите, что накрытие сферы с g_1 ручками сферой с g_2 ручками существует тогда и только тогда, когда g_2-1 делится на g_1-1.