НМУ, II курс, 24.09.2021

Листок 2.

Задача 1.

(a) Напишите формулы стереографической проекции единичной сферы с центром в нуле из точки $(0,0,1)$ (Северный полюс) на плоскость, касающуюся сферы в точке $(0,0,-1)$ (Южный полюс).

(b) Докажите, что экваторы переходят в окружности или прямые, причем в прямые переходят только экваторы, проходящие через Северный полюс.

(c) Проверьте, что стереографические проекции из точек $(0,0,1)$ и $(0,0,-1)$ задают гладкий атлас из двух карт. Эквивалентен ли этот атлас атласу с картами, задаваемыми отображениями ортогонального проектирования на плоскости OXY, OYZ и OXZ?

Задача 2. Пусть M — непустое топологическое многообразие размерности $n \geq 1$. Предположим, что на M существует гладкий атлас. Докажите, что на M можно построить континуальное множество попарно неэквивалентных гладких атласов.

Задача 3. Рассмотрим множество $G(k,n)$ k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$. Пусть $v_1,\dots,v_k$ – линейно независимые векторы в $\mathbb{R}^n$. Такие векторы образуют открытое множество в $\mathbb{R}^{nk}$. Введем отношение эквивалентности: два набора линейно независимых векторов эквивалентны, если порождают одно и тоже k-мерное подпространство. Топология на $G(k,n)$ – топология факторпространства. Докажите, что

(a) $G(k,n)$ – хаусдорфово пространство, (b) $G(k,n)$ – гладкое многообразие размерности $k(n-k)$. Многообразие $G(k,n)$ называется многообразием Грассмана.

Задача 4. Рассмотрим группы: GL_n – группа невырожденных линейных преобразований $\mathbb{R}^n$, SL_n – группа невырожденных линейных преобразований $\mathbb{R}^n$ с единичным определителем, O_n – группа невырожденных линейных преобразований $\mathbb{R}^n$, сохраняющих скалярное произведение.

(a) Проверьте, что перечисленные группы являются гладкими подмногообразиями в $\mathbb{R}^{n^2}$ и найдите их размерность.

(b) Для каждого из этих многообразий опишите касательные пространства в единице.

(c) Проверьте, являются ли рассматриваемые многообразия связными, и в случае отрицательного ответа опишите все компоненты связности.

Задача 5. Пусть отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определено следующим образом: $f(x)=0$ при $x<0$ и $f(x)=1$ при $x \geq 0$. Докажите, что для каждого x найдутся такие гладкие карты (U,φ) и (V,ψ), содержащие x и $f(x)$ соответственно, что $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ является гладким отображением из $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ в $\psi(V)$. В чем отличие этого свойства f от требуемого в определении гладкого отображения многообразий?

Задача 6. Пусть $f\colon \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}^{k+1}\setminus\{0\}$ — гладкое отображение и для некоторого целого m выполняется $f(\lambda x)=\lambda^m f(x)$ для всех $x \neq 0$ и всех $\lambda > 0$. Докажите, что отображение $F\colon \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^k$, порождаемое функцией f, является гладким.

Задача 7. Докажите, что сопоставление пространству его ортогонального дополнения задает диффеоморфизм многообразий $G(k,n)$ и $G(n-k,n)$.

Задача 8. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ – бесконечно дифференцируемое отображение. Докажите, что для почти всякого линейного отображения $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ (мы отождествляем пространство линейных отображений из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^3$ с $\mathbb{R}^3$) отображение $f+L$ является погружением.

Задача 9. Докажите, что касательно расслоение окружности S^1 гомеоморфно цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}$.

Задача 10. Докажите, что касательное расслоение сферы S^2 гомеоморфно множеству в $\mathbb{C}^3$, определяемому равенством $z_1^2+z_2^2+z_3^2=1$.