НМУ, II курс, 15.10.2021

Листок 3.

Задача 1. Пусть M^k — гладкое многообразие и $f\colon M^k \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Докажите, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует гладкая функция $g\colon M^k \to \mathbb{R}$, с которой выполняется неравенство

$$\sup_{p\in M^k} |f(p) - g(p)| < \varepsilon.$$

Задача 2. Предположим, что существует гладкое вложение M^k в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что существует гладкое вложение TM^k в $\mathbb{R}^{2n}$.

Задача 3. Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Рассмотрим отображение $F(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$ из $\mathbb{R}$ в тор $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$. Покажите, что F является погружением и $F(\mathbb{R})$ всюду плотно в $\mathbb{T}^2$. Объясните, почему F не является вложением.

Задача 4. Проверьте, что отображение g из $\mathbb{RP}^2$ в плоскость $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ в $\mathbb{R}^6$, заданное формулой

$$g([x_1, x_2, x_3]) = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6),$$

где

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad & y_2 &= \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad & y_3 &= \frac{x_3^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ y_3 &= \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad & y_4 &= \frac{x_2 x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad & y_6 &= \frac{x_3 x_1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \end{aligned}$$

является вложением $\mathbb{RP}^2$ в $\mathbb{R}^5$.

Задача 5. Докажите, что гладкое компактное многообразие размерности n нельзя вложить в $\mathbb{R}^n$.

Задача 6. Пусть M – гладкое компактное многообразие и $f\colon M \to \mathbb{R}$ – гладкая функция. Докажите, что существует такое вложение M в $\mathbb{R}^N$, при котором f оказывается ограничением какой-то координаты на M.

Задача 7. Приведите пример гладкой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с несчетным множеством критических значений.

Задача 8. Используя стереографическую проекцию (сферы $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1$ на плоскость $x_3 = 0$) постройте по многочлену $P(z)$ (здесь $z = x_1 + ix_2$) соответствующее ему гладкое отображение S^2 в S^2. От чего зависит степень $(\mathrm{mod}\, 2)$ этого отображения?

Задача 9. Отображение $f\colon SO(3) \to SO(3)$ задано формулой $f(X) = X^4$. Гомотопно ли это отображение тождественному?

Задача 10. Докажите, что степень $(\mathrm{mod}\, 2)$ всякого гладкого отображения $S^2 \to \mathbb{T}^2$ равна нулю.