Листок 5.

Задача 1. Пусть H^n — одномерная мера Хаусдорфа на $\mathbb{R}^n$, а λ_n^* — верхняя мера Лебега на $\mathbb{R}^n$.

(a) Покажите, что $H^1 = \lambda_1^*$.

(b)* Пусть A — компакт в $\mathbb{R}^n$. Для всякого $z \in \{x_n = 0\}$ через l_z обозначим прямую, перпендикулярную гиперплоскости $\{x_n = 0\}$. Пусть $S(A) = \bigcup_z \{z\} \times [-q_z, q_z]$, где $q_z = \lambda_1(A \bigcap l_z)/2$. Докажите, что $\lambda_n(S(A)) = \lambda_n(A)$ и $\operatorname{diam} S(A) \le \operatorname{diam} A$.

(c)* Докажите изодиаметрическое неравенство: $\lambda_n(A) \le \omega_n(\operatorname{diam} A/2)^n$, где ω_n — объём единичного шара и A — произвольное компактное множество.

(d)* Докажите, что $H^n = C\lambda_n^*$ на всех множествах и найдите константу C.

Задача 2.

Пусть f — непрерывно дифференцируемая функция на $[0;1]$ и Γ_f — её график. Докажите, что

$$H^1(\Gamma_f) = \int_0^1 \sqrt{1 + |f'(x)|^2}\, dx.$$

Задача 3. Пусть $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Пусть

$$\Psi(x,s) = (x, f(x)) + s\frac{(-f'(x), 1)}{\sqrt{1 + |f'(x)|^2}}$$

Каков геометрический смысл множества $Q_t = \Psi([0,1] \times [0;t])$? Вычислите предел

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}|Q_t|.$$

Задача 4. Пусть $x, v \in \mathbb{R}^3$ и $\|v\| = 1$. Докажите, что

$$\int_{\|x\|=1} f\big(\langle x, v\rangle\big)\, d\sigma = 2\pi \int_{-1}^1 f(t)\, dt.$$

Задача 5. Докажите, что для всякой непрерывной функции u на $\mathbb{R}^n$ верно равенство

$$\int_{\|x\|\le R} u(x)\, dx = \int_0^R \int_{\|x\|=r} u(x)\, \sigma_{n-1}(dx)\, dr,$$

где σ_{n-1} — поверхностная мера на сфере.

Задача 6. Существует ли гладкое векторное поле F на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее одновременно двум условиям

$$\operatorname{div} F = 0 \quad \text{и} \quad \langle F(x), x\rangle \le -|x|^2?$$

Задача 7. Пусть $u \in C^3(\mathbb{R}^n)$, $K = [0,1]^n$ и $u = 0$ на ∂K. Обоснуйте равенство

$$\int_K |\Delta u(x)|^2\, dx = \int_K \|D^2(x)\|^2\, dx,$$

где

$$\Delta u(x) = \tfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x) + \ldots + \tfrac{\partial^2}{\partial x_n^2} u(x), \quad \|D^2(x)\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \Big|\tfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x)\Big|^2.$$