Листок 6.

Задача 1. Найдите значение формы $(3dy \wedge dz - 5dz \wedge dx)(\xi, \eta)$ на векторах

$$\xi = (3, 4, 5), \quad \eta = (1, 0, 1).$$

Задача 2. Пусть (P, Q, R) — гладкое векторное поле на $\mathbb{R}^3$. Вычислите

$$d(Pdx + Qdy + Rdz), \quad d(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy).$$

Задача 3. На $\mathbb{R}^3$ задана форма $\omega = dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx$. Найдите какую-нибудь форму α, для которой $\omega = d\alpha$.

Задача 4. Пусть v, u – гладкие векторные поля и ω – дифференциальная 1 форма. Докажите равенство:

$$d\omega(v, u) = v(\omega(u)) - u(\omega(v)) - \omega([v, u]).$$

Задача 5. Пусть фазовый поток g_t порожден векторным полем $H_y \partial_x - H_x \partial_y$ на плоскости. Докажите, что $g_t^* dx \wedge dy = dx \wedge dy$.

Задача 6. Пусть g_t – семейство гладких отображений многообразия M в многообразие N, причем $g_t(z)$ гладко зависит от (t, z), $\frac{d}{dt} g_t(z) = X(t, g_t(z)) \in TN_{g_t(z)}$ и ω – дифференциальная k форма. Докажите, что

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t^* \omega = d(g_t^*(i_X \omega)) + g_t^*(i_X d\omega),$$

где $i_X \omega(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = \omega(X, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$.

Задача 7. (Лемма Пуанкаре) Используя предыдущую задачу докажите, что на стягиваемом многообразии (M – стягиваемое многообразие, если существует гладкое отображение $g\colon M \times [0, 1] \to M$ такое, что $g(x, 1) = x$ и $g(x, 0) = x_0$ для некоторого $x_0 \in M$) всякая замкнутая форма ω (т.е. $d\omega = 0$) является точной, т.е. $\omega = d\alpha$.

Задача 8. Пусть ω – дифференциальная k-форма на $\mathbb{R}^n$ и $\xi_1, \dots, \xi_{k+1}$ – вектора, отложенные от точки x. Обозначим через $\Pi_\varepsilon = \Pi(\varepsilon\xi_1, \dots, \varepsilon\xi_{k+1})$ параллелепипед, натянутый на вектора $\varepsilon\xi_1, \dots, \varepsilon\xi_{k+1}$. Докажите, что

$$d\omega(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) = \frac{1}{\varepsilon^{k+1}} \int_{\partial \Pi_\varepsilon} \omega.$$

Задача 9. Пусть

$$\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

(a) Докажите, что ω — замкнутая форма в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(b) Вычислите

$$\int_{S^2} \omega, \quad S^2 = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

(c) Пусть Q – выпуклая область с гладкой границей в $\mathbb{R}^3$. Найдите

$$\int_{\partial Q} \omega.$$