Лекция 1.

07.09.2021

Введение.

$$1+2+3+4+\ldots = -\frac{1}{12}$$

Как придать этому смысл?

Хорошо известно, что

$$1+q+q^2+\ldots = \frac{1}{1-q} \Rightarrow$$

$$1+2q+3q^2+\ldots = \frac{1}{(1-q)^2} \text{ и } \Rightarrow$$

$$1-2+3-4+\ldots = \frac{1}{(1-(-1))^2} = \frac{1}{4}$$

Если $S = 1+2+3+4+5+\ldots$, то $4S = 2(2+4+6+8+\ldots) \Rightarrow$

$-3S = S - 4S = 1-2+3-4+\ldots = 1/4 \Rightarrow S = -\frac{1}{12}$.

Есть и другие способы это понять.

Вычисление выше означает, что $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$.

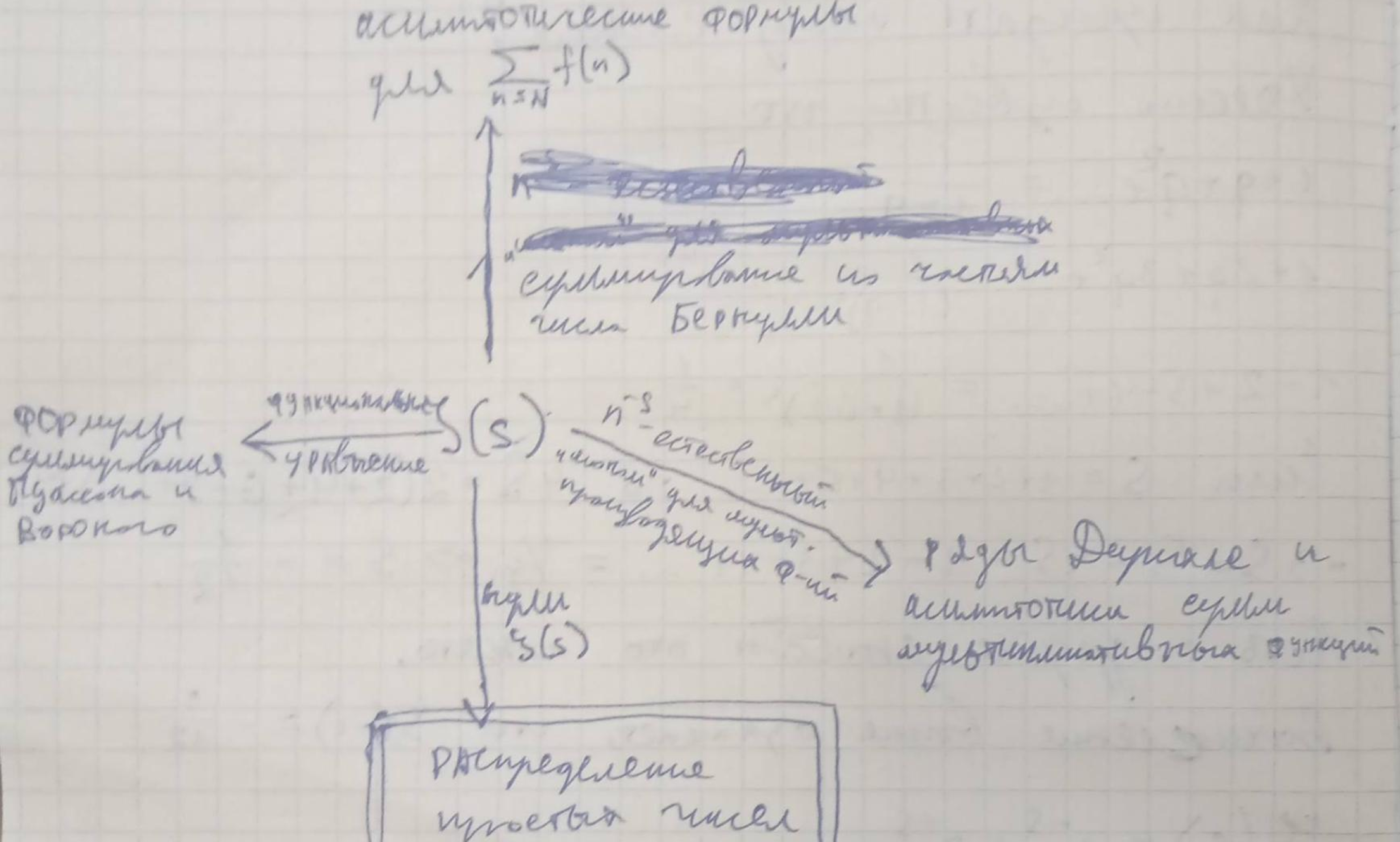
$$\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + \ldots$$

Рассмотрена Эйлером для $s \in \mathbb{R}$ в 1737 г.

Дирихле и Чебышёвым в контексте распределения простых чисел.

Работа Римана 1859 г., в которой $\zeta(s)$ рассматривается как ф-я комплексной переменной, ознаменовала начало новой эпохи в теории чисел.

В этом курсе мы говорим о $\zeta(s)$ как о самостоятельном объекте.



В данной лекции мы поговорим о некоторых простых видах асимптотических формул, а также о самых простых свойствах $\zeta(s)$.

1. Ещё один способ вычисления $\zeta(-1)$.

Сглаженный вариант бесконечной суммы:

$w: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ – гладкая быстро убывающая функция.

$$S_w(N) := \sum_{n \leq N}^{w} n := \sum_{n} n w\left(\frac{n}{N}\right)$$

Конкретный пример: $w(x) = e^{-x}$

$$S_w(N) = \sum_{n} n w\left(\frac{n}{N}\right) = e^{-\frac{1}{N}} + 2e^{-\frac{2}{N}} + \ldots =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{N}}}{\left(1-e^{-\frac{1}{N}}\right)^2} = \frac{e^{\frac{1}{N}}}{\left(e^{\frac{1}{N}}-1\right)^2}.$$

$$e^{\frac{1}{N}} = 1 + \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} + O(N^{-3})$$

$$\left(e^{\frac{1}{N}}-1\right)^{-2} = N^2 - N + \frac{5}{12} + O\left(\frac{1}{N}\right) \Rightarrow$$

$$S_w(N) = N^2 - \frac{1}{12} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

2. Суммирование по частям.

Суммы функций по целым числам = интеграл по мере Лебега–Стилтьеса $d[x]$.

$$\sum_{n\le x} f(n) = f(1) + \int_1^x f(u)\,d[u] = f(1) + \int_1^x f(u)\,du -$$

$$- \int_1^x f(u)\,d\{u\} = f(1) + \int_1^x f(u)\,du - \{x\} f(x) + \int_1^x f'(u)\{u\}\,du.$$

Примеры:

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n} = 1 + \int_1^x \frac{du}{u} - \frac{\{x\}}{x} - \int_1^x \frac{\{u\}}{u^2}\,du =$$

$$= \ln x + \underbrace{1 - \int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^2}\,du}_{\gamma\text{ — константа Эйлера — Маскерони}} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

γ — константа Эйлера–Маскерони

$\gamma = 0.577215\ldots$

$$\sum_{n\le x} \ln n = \ln [x]! = \int_1^x \ln u\,du - \{x\}\ln x + \int_1^x \frac{\{u\}}{u}\,du =$$

$$= x\ln x - x + O(\ln x).$$

Формула Стирлинга:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \Rightarrow \ln n! = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln 2\pi.$$

3. Свойства $\zeta(s)$. $\boxed{s = \sigma + it}$ – здесь и везде далее.

I. Сходимость ряда:

Ряд для $\zeta(s)$ сходится абсолютно и равномерно при $\sigma > 1+\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \leq 1 + 2^{-1-\varepsilon} + 2\cdot 4^{-1-\varepsilon} +$$

$$+ 4\cdot 8^{-1-\varepsilon} + \dots = 1 + \frac{2^{-1-\varepsilon}}{1-2^{-\varepsilon}}.$$

II. Мероморфное продолжение в $\sigma > 0$

Пусть $\sigma > 1$, $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n \leq N} n^{-s} = 1 + \int_1^N x^{-s}\, d[x] = 1 + \int_1^N x^{-s}\, dx - s\int_1^N \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\, dx =$$

$$= 1 + \frac{N^{1-s} - 1}{1-s} - s\int_1^N \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\, dx.$$

$N \to +\infty$

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\, dx.$$

Правая часть мероморфна при $\sigma > 0$!

III. $\zeta(s)$ имеет простой полюс в $s=1$ с вычетом 1. Разложение в $s=1$ имеет вид

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\gamma+O(s-1)$$

Действительно, при $s\to 1+0$

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{s-1}-s\int\limits_1^{+\infty}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx=\frac{1}{s-1}+1-\int\limits_1^{+\infty}\frac{\{x\}}{x^2}dx+O(s-1)=$$

$$=\frac{1}{s-1}+\gamma+O(s-1).$$