

## Гиперболическая геометрия

**Задача 8.1.** а) В любой ли гиперболический треугольник можно вписать окружность?  
б) Вокруг любого ли гиперболического треугольника можно описать окружность?

**Задача 8.2.** Докажите, что все гиперболические «треугольники» с вершинами на абсолюте равны.

**Задача 8.3.** Выясните, когда у двух прямых на гиперболической плоскости есть общий перпендикуляр.

**Задача 8.4.** а) Докажите, что выражение  $\frac{|z-w|^2}{\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}$  сохраняется при действии группы  $PSL_2(\mathbb{R})$  на верхней полуплоскости.

б) Как это выражение связано с гиперболическим расстоянием между точками  $Z$  и  $W$ ?

в) Убедитесь, что для близких точек в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости

$$d(Z, W) = \frac{|z-w|}{\operatorname{Im} z} + o(|z-w|)$$

(«элемент длины имеет вид  $ds/y$ , где  $ds$  — евклидов элемент длины»).

г) Убедитесь, что для близких точек в модели Пуанкаре в круге

$$d(Z, W) = \frac{2|z-w|}{1-|z|^2} + o(|z-w|)$$

(«элемент длины имеет вид  $2ds/(1-R^2)$ , где  $ds$  — евклидов элемент длины»).

**Задача 8.5.** Две прямые строго параллельны (т. е. пересекаются на абсолюте). Равно ли расстояние между ними нулю?

**Задача 8.6.** а) Найдите расстояние от точки  $ai$  до точки  $bi$  в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости. Где находится середина отрезка с концами в этих точках?

б) Найдите точку  $R$  в модели Пуанкаре в круге, расстояние от которой до центра круга равно  $r$ .

**Задача 8.7.** а) Чему в гиперболической геометрии равна длина  $l(r)$  окружности радиуса  $r$ ? Больше она или меньше, чем в Евклидовой геометрии?

б) Найдите площадь  $s(r)$  гиперболического круга радиуса  $r$ . Убедитесь в том, что при больших  $r$  более 99% площади круга сосредоточено в кольце толщины 1% от  $r$ .

**Задача 8.8.** а) Докажите, что для прямоугольного треугольника выполняется *гиперболическая теорема Пифагора*:

$$s(c) = s(a) + s(b) + \frac{s(a)s(b)}{2\pi}.$$

б) Найдите такую константу  $D$ , что в любом гиперболическом прямоугольном треугольнике  $c > a + b - D$ .