Листок 2
ТЕОРИЯ МИНИМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ I
ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИЗА НА МНОГООБРАЗИЯХ

1. Пусть (M, g) - ориентированное риманово многообразия. Обозначим через ω форму объёма (M, g). Докажите, что

$$\operatorname{div} X\omega = d(\iota(X)\omega), \forall X \in \Gamma(TM).$$

Здесь ι – внутреннее произведение ω и X.

2. *(Теорема Хопфа)* Пусть (M, g) - замкнутое ориентированное риманово многообразия и $f \in C^2(M)$ такая что $\Delta_g f \geqslant 0$. Докажите, что тогда $f = Const$ не пользуясь принципом максимума Хопфа. Остаётся ли этот результат верных для неориентируемых компактных многообразий?

Указание: Воспользуйтесь формулой Стокса и предыдущей задачей для *какого-то подходящего поля.*

3. Пусть (M, g) – подмногообразие риманова многообразия (N, h). Пусть $Hess^M f$ и $Hess^N f$ – гессианы функции f на (M, g) и (N, h) соответсвенно. Выразить $Hess^M f$ через $Hess^N f$ и вторую квадратичную форму. Найти связь между лапласианом Δ^M многообразия (M, g) и лапласианом Δ^N многообразия (N, h). Доказать, что в $\mathbb{E}^n$ нет компактных минимальных подмногообразий используя эту формулу связи.

4. Пусть (M, g) – риманово многообразие. Докажите, что для всякой функции $u \in C^2(M)$ и всякого $\varepsilon > 0$ верно, что

$$2\int_M |\nabla_g u|^2 dv_g \leqslant \varepsilon \int_M (\Delta_g u)^2 dv_g + \frac{1}{\varepsilon}\int_M u^2 dv_g.$$

5. Пусть функция $u\colon \mathbb{B}(0, R) \to \mathbb{R}$ гармонична и неотрицательна. Выведите из неравенства Гарнака в общем виде следующую версию неравенства Гарнака для гармонических функций в шаре, известную из стандартного курса по уравнениям с частными производными:

$$\frac{R^{n-2}(R - |x|)}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leqslant u(x) \leqslant \frac{R^{n-2}(R + |x|)}{(R - |x|)^{n-1}} u(0).$$

6. Докажите, что энергия Дирихле $E[u] = \int_M |\nabla_g u|_g^2 dv_g$ является выпуклым функционалом, т.е. $E[tu + (1-t)v] \leqslant tE[u] + (1-t)E[v],\ \forall u, v \in H^1(M, dv_g)$.

7. a) Пусть (M, g) – компактное многообразие с краем, $\psi \in L^2(M, dv_g)$ и $\varphi \in H^1(M, dv_g)$. Пусть u – слабое решение уравнения Пуассона $\Delta_g u = f$ такое, что $u - \varphi \in H^1_0(M, dv_g)$. Докажите следующую оценку:

$$||u||_{H^1(M,dv_g)} \leqslant C(g)(||\varphi||_{H^1(M,dv_g)} + ||\psi||_{L^2(M,dv_g)}).$$

b) Оцените константу $C(g)$ в оценке из пункта a), используя спектр задачи Дирихле многообразия (M, g).