Листок 3

ТЕОРИЯ МИНИМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ I КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, КОНУСЫ САЙМОНСА И ПОДМНОГООБРАЗИЯ В СФЕРАХ

1. (а) Пусть (M, g) - риманова поверхность и $g = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$. Докажите, что можно ввести такую локальную комплексную координату z, что метрика принимает вид

$$g = \lambda(z)|dz + \mu(z)d\bar{z}|^2 = \lambda(z)(dz + \mu(z)d\bar{z})\overline{(dz + \mu(z)d\bar{z})},$$

где $\lambda(z) > 0$ и $||\mu(z)||_{L^\infty(M,dv_g)} < \infty$. Коэффициент μ называется *коэффициентом или дифференциалом Бельтрами.* Он описывает изменения направлений при инфинитезимальном искажении расстояний при диффеоморфизмах поверхности. Докажите, что μ является $(-1,1)-$формой, т.е. $\mu(z)d\bar{z}/dz$ инвариантно при заменах координат.

(б) Докажите, что отображение $f\colon (M, g) \to (M, h)$ конформно тогда и только тогда, когда f удовлетворяет *уравнению Бельтрами*: $f_{\bar{z}} = \mu f_z$.

2. (а) Пусть $M^k - k-$ мерное подмногообразие в $\mathbb{S}^n$, а $CM_\varepsilon \subset \mathbb{E}^{n+1}$ $-$ его конус Саймонса. Докажите, что для вторых квадратичных форм верно, что $|B_{CM_\varepsilon}|^2 = \frac{1}{t^2}|B_M|^2$.

(б) Докажите, что

$$\Delta_{CM_\varepsilon} u(x) = \frac{1}{t^2}\Delta_M u\left(\frac{x}{t}\right) - \frac{k}{t}\frac{\partial u(x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x)}{\partial t^2}.$$

3. Пусть

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}xy, \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}xz, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}yz,$$
$$u_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 - y^2), \quad u_4 = \frac{1}{6}(x^2 + y^2 - 2z^2).$$

Докажите, что отображение $\mathbb{S}^2_{\sqrt{3}} \to \mathbb{S}^4$ заданное как

$$(x, y, z) \mapsto (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4),\ x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

является минимальным погружением. Оно называется *вложением Веронезе.* Покажите, что оно задаёт вложение $\mathbb{RP}^2$ с метрикой кривизны $\frac{1}{3}$ в $\mathbb{S}^4$.

3. Пусть

$$u_0 = \frac{\sqrt{6}}{72}z(-3x^2 - 3y^2 + 2z^2), \quad u_1 = \frac{1}{24}x(-x^2 - y^2 + 4z^2),$$
$$u_2 = \frac{\sqrt{10}}{24}z(x^2 - y^2), \quad u_3 = \frac{\sqrt{15}}{72}x(x^2 - 3y^2),$$
$$u_4 = \frac{1}{24}y(-x^2 - y^2 + 4z^2), \quad u_5 = \frac{\sqrt{10}}{12}xyz,$$
$$u_6 = \frac{\sqrt{15}}{72}y(3x^2 - y^2).$$

Докажите, что отображение $\mathbb{S}^2_{\sqrt{6}} \to \mathbb{S}^6$ заданное как

$$(x, y, z) \mapsto (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6),\ x^2 + y^2 + z^2 = 6$$

является минимальным погружением.