КОБОРДИЗМЫ И ДЕЙСТВИЯ ТОРА
ЛИСТОК 2: УМНОЖЕНИЯ, ГОМОМОРФИЗМ ГИЗИНА, ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПУАНКАРЕ–АТЬЯ, ПРОЕКТИВИЗАЦИИ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Докажите, что гомоморфизм двойственности Пуанкаре–Атья

$$D = \,\cdot \frown [X] \colon U^k(X) \to U_{d-k}(X), \quad x \mapsto x \frown [X]$$

является изоморфизмом для любого замкнутого стабильно комплексного многообразия X размерности d.

2. Пусть $f\colon X^d \to Y^{p+d}$ — комплексно-ориентированное отображение многообразий, и пусть $D_X \colon U^k(X) \to U_{d-k}(X)$, $D_Y \colon U^{p+k}(Y) \to U_{d-k}(Y)$ — изоморфизмы двойственности для X, Y, соответственно. Докажите, что гомоморфизм Гизина удовлетворяет соотношению

$$f_! = D_Y^{-1} f_* D_X.$$

3. Пусть ξ — комплексное n-мерное расслоение над многообразием M с тотальным пространством E, и пусть $i\colon M \to E$ — вложение нулевого сечения. Определите гомоморфизм Гизина

$$i_! \colon U^*(M) \to U^{*+2n}(E, E \setminus M) = U^{*+2n}(Th(\xi))$$

и покажите, что $i_!$ является изоморфизмом. Он называется *изоморфизмом Гизина–Тома*, соответстующим комплексному расслоению ξ.

4. Пусть ξ, γ — комплексные векторные расслоения над клеточным пространством X, причём γ одномерно. Докажите, что расслоения $\mathbb{C}P(\xi \otimes \gamma)$ и $\mathbb{C}P(\xi)$ изоморфны. То же для вещественных векторных расслоений и проективизаций.

5. Пусть ξ — комплексное векторное расслоения над клеточным пространством X, пусть $\mathbb{C}P(\xi) \to X$ — его проективизация, η — тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P(\xi)$ и $\mathcal{T}_F\mathbb{C}P(\xi)$ — касательное расслоение вдоль слоёв расслоения $\mathbb{C}P(\xi) \to X$. Докажите, что

$$\mathcal{T}_F\mathbb{C}P(\xi) \cong \mathrm{Hom}(\eta, \eta^\perp),$$

где $\eta^\perp$ — ортогональное доположение к η в слоях расслоения ξ.

6. Рассмотрим отображение $q\colon \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^n/\mathbb{C}P^{n-1} \cong S^{2n}$. Докажите, что $q^*\alpha = v^n$, где $\alpha \in H^{2n}(S^{2n})$ — стандартная образующая, происходящая из ориентации $\mathbb{C}P^n$, а $v \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к $[\mathbb{C}P^{n-1}] \in H_{2n-2}(\mathbb{C}P^n)$.

Date: 11 октября 2021 г.