

**МГУ & НМУ, спектральная геометрия.**  
**Экзамен 18.12.2021.**

*Это домашний экзамен. Решения должны быть не позднее 24 декабря присланы мне по электронной почте в отсканированном (или хорошо сфотографированном на телефон) виде. Шкала оценок:  $\geq 60$  баллов = 5 «отлично»,  $\geq 45$  баллов = «хорошо»,  $\geq 30$  баллов = «удовлетворительно».*

**Задача 1.** Найдите формулу для оператора Лапласа-Бельтрами в изотермических координатах на поверхности, то есть в таких локальных координатах  $x$  и  $y$ , что метрика имеет вид  $ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$ . (5 баллов).

**Задача 2.** Мы знаем, что спектр Дирихле области обладает свойством монотонности, то есть если  $\Omega_1 \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ , то  $\lambda_i(\Omega_1) \geq \lambda_i(\Omega)$ .

Докажите, что спектр Неймана не обладает таким свойством, то есть приведите примеры, в которых спектр а) возрастает и б) убывает, когда переходят от области к подобласти. (5 баллов).

**Задача 3.** Найдите верхнюю и нижнюю оценку первых десяти собственных чисел Дирихле области  $ABCDEF$ , где  $A = (0, 0)$ ,  $B = (0, 2)$ ,  $C = (1, 2)$ ,  $D = (1, 1)$ ,  $E = (2, 1)$ ,  $F = (2, 0)$ . (до 10 баллов в зависимости от оценок).

**Задача 4.** Теорема Фабера-Крана утверждает, что диск минимизирует первое собственное число Дирихле  $\lambda_1(\Omega)$  среди всех плоских областей той же площади. Докажите, что два дизъюнктных диска одинакового радиуса минимизируют  $\lambda_2(\Omega)$  среди всех плоских областей той же площади. (10 баллов).

**Задача 5.** Докажите, что дизъюнктное объединение  $n$  дисков одинакового радиуса не может минимизировать собственные числа Дирихле  $\lambda_n(\Omega)$  для всех  $n$  (5 баллов).

**Задача 6.** Пусть  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — две соседние (то есть имеющие общую границу в виде куска гиперповерхности) нодальные области собственной функции  $u$  оператора Лапласа с граничным условием Дирихле в некоторой области евклидова пространства. Может ли  $u$  иметь один и тот же знак в  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ ? Приведите доказательство вашего ответа. (5 баллов).

**Задача 7.** Докажите, что спектр квадрата со стороной длины 1 с граничным условием Дирихле на трёх сторонах и условием Неймана на оставшейся стороне совпадает со спектром прямоугольного треугольника с катетами длины  $\sqrt{2}$  с граничным условием Дирихле на гипотенузе и одним катете, и граничным условием Неймана на другом катете (15 баллов).

**Задача 8.** Найти спектр (с учётом кратностей!) для проективной плоскости со стандартной метрикой (полученной опусканием стандартной метрики на сфере при стандартном двулистном накрытии). (5 баллов).

**Задача 9.** Постройте изометрическое вложение первыми собственными функциями для стандартной метрики на  $\mathbb{RP}^2$  в сферу. Найдите с помощью этого вложения соответствующий конформный объём  $\mathbb{RP}^2$  и докажите, что

$$\Lambda_1(\mathbb{RP}^2) = \sup_g \bar{\lambda}_1(\mathbb{RP}^2, g).$$

(10 баллов).

**Задача 10.** Сконструируйте изометрическое погружение клиффордова тора в сферы, используя собственные функции  $\Delta$  с собственным числом  $\lambda_1$ . Докажите, что метрика  $g_{CI}$  на клиффордовом торе экстремальна для функционала  $\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g) = \lambda_1(\mathbb{T}^2, g) \text{Area}(\mathbb{T}^2, g)$ . Найдите значение  $\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g_{CI})$  (10 баллов).

**Задача 11.** Сконструируйте подходящее изометрическое погружение клиффордова тора в сферу с помощью собственных функций оператора  $\Delta$  и докажите, что метрика  $g_{CI}$  на клиффордовом торе экстремальна для бесконечного количества функционалов  $\bar{\lambda}_j(\mathbb{T}^2, g) = \lambda_j(\mathbb{T}^2, g) \text{Area}(\mathbb{T}^2, g)$ . Найдите как минимум три таких значения  $j$ . (15 баллов).

**Задача 12\***. Используя тот же подход, что и в задаче 10, докажите, что метрика  $g_{eq}$  на равностороннем торе экстремальна для функционала  $\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g)$ . Найдите  $\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g_{eq})$ . Докажите, что метрика  $g_{CI}$  на клиффордовом торе не максимальна для функционала  $\bar{\lambda}_1(\mathbb{T}^2, g)$  (25 баллов).