Поля алгебраических чисел.

Задачи - 1.

Дедлайн для задач 18 - 23 : вторник, 23 ноября.

Дедлайн можно отодвинуть, если у вас завал, но о том, что вы не успеваете (хоть и намерены сдать задание), меня следует предупредить.

18. Пусть N - свободная $\mathcal{O}$-решетка в K ранга n, порожденная базисом $\{e_i\}$. Проверьте, что $D_{\mathcal{O}}(N)$ - свободная $\mathcal{O}$-решетка в K, порожденная двойственным базисом $\{f_j\}$.
19. Пусть $N = \langle\{e_i\}\rangle$, $M = \langle\{g_i\}\rangle$ - свободные $\mathcal{O}$-решетки в $\mathcal{O}_K$. Докажите, что $(D_{\mathcal{O}}(N) : D_{\mathcal{O}}(M))_{\mathcal{O}} = (M : N)_{\mathcal{O}}$.
20. Докажите, что если $N = \langle\{e_i\}\rangle$ - свободная $\mathcal{O}$-решетка в $\mathcal{O}_K$, то $\mathfrak{d}_{\mathcal{O}}(N) = (\det Tr(e_i e_j))$.
21. Пусть k - поле. Докажите, что любая конечномерная k-алгебра без делителей нуля - поле.
22. Пусть $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$, d - бесквадратное целое число. Вычислите какой-нибудь базис кольца $\mathcal{O}_K$ над $\mathbf{Z}$ и сосчитайте дискриминант Δ_K.
23. Пусть $\mathcal{O}$ - дедекиндова область. Проверьте, что факторкольцо $\mathcal{O}/I$ по любому ненулевому идеалу - кольцо главных идеалов.

Упражнения.

Упражнения полезно сделать, чтобы не оставлять ничего за спиной. Записывать и сдавать решения не нужно.

Разберите ещё раз доказательства теорем 3.20, 3.23 и 3.29 из английского конспекта.