Локальные поля.

Задачи.

Дедлайн для задач 29 - 35 (можно сдвинуть, предупредив) : вторник, 20 декабря.

29. Пусть $K/\mathbf{Q}_p$ - вполне и слабо разветвленное расширение Галуа степени n. Докажите, что $n < p$.
30. Докажите, что любое неразветвленное расширение $\mathbf{Q}_p$ порождается каким-то корнем из единицы.
31. Продолжим p - адическое нормирование v_p с $\mathbf{Q}_p$ на $\overline{\mathbf{Q}_p}$, а потом на $\mathbf{C}_p$ по непрерывности. Опишите множество $\mathrm{v}_p(\mathbf{C}_p)$.
32. Опишите многоугольники Ньютона степенных рядов $-\log(1-T)/T = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{T^{i-1}}{i}$ и $\exp(T) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{T^i}{i!}$ и определите их радиусы сходимости в $\mathbf{C}_p$. Сходятся ли эти ряды на границе радиуса сходимости?
33. Постройте степенной ряд, многоугольник Ньютона которого обладает стороной с иррациональным наклоном.
34. Определим экспоненту Артина - Хассе как степенной ряд, задаваемый формулой $E_p(T) \overset{\mathrm{def}}{=} \exp(\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{T^{p^i}}{p^i})$. Проверьте, что $E_p(T) = \prod\limits_{n=1, p\nmid n}^{\infty} (1-T^n)^{\frac{-\mu(n)}{n}}$.Также проверьте, что если убрать во второй формуле условие $p \nmid n$, то получится обычная экспонента.
35. Докажите лемму Дворка: Пусть $F(T) \in 1 + T\mathbf{Q}_p[[T]]$. Тогда$F(T) \in 1 + T\mathbf{Z}_p[[T]] \Leftrightarrow F(T^p)/(F(T)^p \in 1 + pT\mathbf{Z}_p[[T]]$. Выведите из неё, что $E_p(T)$ имеет p - целые коэффициенты. Определите радиус сходимости $E_p(T)$.

Упражнения.

Упражнения полезно сделать, чтобы не оставлять ничего за спиной. Записывать и сдавать решения не нужно.
1. Разберите доказательство теоремы 4.15.
2. Докажите, что внутри круга сходимости степенной ряд определяет непрерывную функцию.
3. Пусть все наклоны многоугольника Ньютона ряда $F(T) \in 1 + T\mathbf{C}_p[[T]]$ строго больше λ. Проверьте, что ряд $G(T) = (F(T)^{-1})$ обладает таким же свойством, и что оба ряда сходятся при $\mathrm{v}_p(x) \geq -\lambda$ (а значит, в этом круге не обращаются в нуль).
4. Докажите теорему Вейерштрасса 4.24.