4. Локальные поля

Инерция и ветвление в полных d.v.r.

Если $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ - дедекиндовы области, $\mathfrak{p}_1 \subset \mathcal{O}_1$ и $\mathfrak{p}_2 \subset \mathcal{O}_2$ - ненулевые простые идеалы, такие, что $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2 \cap \mathcal{O}_1$, $k_{\mathfrak{p}_1} = \mathcal{O}_1/\mathfrak{p}_1$, и $k_{\mathfrak{p}_2} = \mathcal{O}_2/\mathfrak{p}_2$ - соответствующие поля вычетов. Индекс инерции (степень классов вычетов) $f(\mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1) \stackrel{\text{def}}{=} [k_{\mathfrak{p}_2} : k_{\mathfrak{p}_1}]$ (может быть и бесконечным), а индекс ветвления $e(\mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{v}_{\mathfrak{p}_2}(\mathfrak{p}_1)$ (всегда конечен).

Как индекс инерции,так и индекс ветвления мультипликативны в башнях. Если $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_\mathfrak{p}$ - d.v.r, а $\mathcal{O}_2 = \widehat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}$ - его пополнение, то оба индекса равны 1.

Далее везде $\mathcal{O}$ - полное d.v.r., $\mathfrak{p}$ - максимальный идеал, k - поле частных, K/k - конечное сепарабельное расширение степени n. Напомним,что $\mathfrak{p}$-адическое нормирование однозначно продолжается с k на K. $\mathcal{O}_K$ - кольцо нормирования (оно же целое замыкание $\mathcal{O}$ в K), $\mathfrak{P} \subset \mathcal{O}_K$ - единственный максимальный идеал, $k_\mathfrak{p}$ и $K_\mathfrak{P}$ - поля вычетов, e и f- соответственно, индекс ветвления и индекс инерции.
Будем предполагать, что $K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}$ тоже сепарабельно (в арифметическом случае это всегда так).

$\forall x \in K \;\; \mathrm{v}_\mathfrak{P}(N(x)) = n\mathrm{v}_\mathfrak{P}(x)$, соответственно, продолжение $\mathfrak{p}$- адического нормирования на K задается формулой $||x|| = ||N(x)||^{\frac{1}{n}}$.

При этих условиях f конечен, $ef = n$. Для общей дедекиндовой области эта формула приобретает вид $n = \sum e_i f_i$, где $e_i = e(\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p}),\ f_i = f(\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p})$.

Если $x \in \mathcal{O}_K$, то $\overline{Tr_{K/k}(x)} = e\,Tr_{K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}}(\overline{x})$, $\overline{N_{K/k}(x)} = (N_{K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}}(\overline{x}))^e$ (горизонтальная черта слева означает редукцию по модулю $\mathfrak{p}$, а справа - редукцию по модулю $\mathfrak{P}$)

Теорема (4.6). $\mathrm{v}_\mathfrak{P}(\mathfrak{D}_{K/k}) \geq e - 1$.

Расширение K/k называется неразветвленным,если $e = 1$, слабо разветвленным, если $\mathrm{char}(k_\mathfrak{p}) \nmid e$, и вполне разветвленным, если $f = 1$.

Расширение неразветвлено $\Leftrightarrow \mathfrak{d}_{K/k} = \mathcal{O}$.

Расширение слабо разветвлено $\Leftrightarrow Tr_{K/k}(\mathcal{O}_K) = \mathcal{O} \Leftrightarrow \mathrm{v}_\mathfrak{P}(\mathfrak{D}_{K/k}) = e - 1$.

Вполне разветвленные расширения.

Сепарабельный полином $P(T) = T^n + \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i T^i \in \mathcal{O}[T]$ называется полиномом Эйзенштейна,если все $a_i \in \mathfrak{p}$ и $\mathrm{v}_{\mathfrak{p}}(a_0) = 1$. Полином Эйзенштейна неприводим

Теорема (4.11).
1) Пусть $K = k_P,\ P \in \mathcal{O}[T]$ - полином Эйзенштейна. Тогда K/k вполне разветвлено.
Если $\Pi \in K,\ \ P(\Pi) = 0$, то $\mathrm{v}_{\mathfrak{P}}(\Pi) = 1$.
2) Пусть K/k вполне разветвлено, $\Pi \in \mathcal{O}_K, \mathrm{v}_{\mathfrak{P}}(\Pi) = 1$. Тогда P_Π - полином Эйзенштейна,
$K = k(\Pi),\ \mathcal{O}_K = \mathcal{O}[\Pi]$.

Неразветвленные расширения.

Теорема (4.12).
1) Пусть $K = k_P,\ \ P \in \mathcal{O}[T]$ унитарен степени n, причем $\overline{P} \in k_{\mathfrak{p}}[T]$ неприводим и сепарабелен (такой полином называыается гензелевым). Тогда K/k неразветвлено, и $K_{\mathfrak{P}} = (k_{\mathfrak{p}})_{\overline{P}}$.
2) Пусть K/k неразветвлено. Тогда $\exists x \in \mathcal{O}_K$ такой, что $K_{\mathfrak{P}} = k_{\mathfrak{p}}(\overline{x})$, и в этом случае $K = k(x),\ \mathcal{O}_K = \mathcal{O}[x]$, и P_x - гензелев полином.

Если K'/k - другое конечное сепарабельное расширение, а $\sigma : K/k \to K'/k$ - гомоморфизм, то его редукция $\overline{\sigma} : K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}} \to K'_{\mathfrak{P}'}/k_{\mathfrak{p}}$ определяется формулой $\overline{\sigma}_(\overline{x}) \overset{\mathrm{def}}{=} \overline{\sigma(x)}$, где x - какой-нибудь прообраз $\overline{x}$ в $\mathcal{O}_K$. Если K/k неразветвлено, а K'/k - произвольное конечное сепарабельное расширение, то естественное отображение $\Sigma_{K/k}^{K'/k} \to \Sigma_{K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}}^{K'_{\mathfrak{P}'}/k_{\mathfrak{p}}}$ взаимнооднозначно. Если K'/k также неразветвлено, а $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}} \simeq K'_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$, то $K/k \simeq K'/k$.

Теорема (максимальное неразветвленное подрасширение).
1) Существует единственное подполе $k \subset K_0 \subset K$, которое неразветвлено над k и содержит любое другое подполе K, неразветвленное над k. Все подполя $k \subset K_1 \subset K_0$ неразветвлены над k. $(K_0)_{\mathfrak{P}_0} = K_{\mathfrak{P}}$.
2) Если K/k нормально, то таково же и K_0/k. Пусть $G = \mathrm{Gal}\,(K/k)$. Тогда K_0/k соответствует подгруппе $G_0 \subset G$, определенной условием $G_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \{g \in G$ такие,что $\forall x \in \mathcal{O}_K\ \ \mathrm{v}_{\mathfrak{P}}(g(x) - x) > 0\}$.
Группа G_0 называется группой инерции.

Поле Тэйта $\mathbf{C}_p$.

Функция v_p однозначно продолжается с $\mathbf{Q}_p^*$ на $\overline{\mathbf{Q}_p}^*$ со значениями в $\mathbf{Q}$ и определяет на поле $\overline{\mathbf{Q}_p}$ неархимедово (недискретное) нормирование.

Пополнение $\mathbf{C}_p$ поля $\overline{\mathbf{Q}_p}$ содержит трансцендентные над $\mathbf{Q}_p$ элементы.

Теорема (лемма Краснера).
Пусть K - поле, полное относительно неархимедова нормирования, $\alpha,\ \beta \in \overline{K}$. Пусть $\{\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ - полный набор корней полинома $P_{\alpha,K}$. Если $\forall i \geq 2\ ||\beta - \alpha|| < ||\alpha - \alpha_i||$, то $\alpha \in K(\beta)$.

Теорема (4.19). $\mathbf{C}_p$ алгебраически замкнуто.

Степенные ряды.
Для степенного ряда $F(T) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i T_i \in \mathbf{C}_p[[T]]$ положим $\mathrm{v}(F) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \liminf \frac{\mathrm{v}_p(a_i)}{i}$. ($\mathrm{v}(F)$ может быть конечным или равняться $+\infty$ или $-\infty$). Тогда ряд $F(x)$ сходится при $\mathrm{v}_p(x) > -\mathrm{v}(F)$, определяя непрерывную функцию, и расходится при $\mathrm{v}_p(x) < -\mathrm{v}(F)$.

Многоугольником Ньютона степенного ряда $F(T) = 1 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i T^i \in 1 + T\mathbf{C}_p[[t]]$ называется нижняя выпуклая оболочка точек $(i, \mathrm{v}_p(a_i))$ на плоскости. Многоугольник Ньютона может совпасть с отрицательной частью вертикальной оси, в противном случае определена строго возрастающая последовательность наклонов сторон λ_j; длина проекции стороны на горизонтальную ось называется длиной l_j соответствующего наклона. Если ряд не является полиномом, а список наклонов конечен, то максимальный из них имеет бесконечную длину.

Теорема. $\mathrm{v}(F) = \sup \lambda_j(F)$. Ряд $F(x)$ сходится при $\mathrm{v}_p(x) = \mathrm{v}(F) \Leftrightarrow \{$список наклонов конечен и расстояние по вертикали между точками (i, a_i) и бесконечной стороной многоугольника Ньютона стремится к $\infty\}$.

Теорема (4.23). Пусть $K \subset \mathbf{C}_p$ - полное подполе, $F(T) \in 1 + TK[T]$ - полином. Тогда $F(T) = \prod F_{\lambda_j(F)},\ \ F_{\lambda_j(F)} \in K[T],\ \ \deg F_{\lambda_j(F)} = l_j(F)$ и для любого корня α полинома $F_{\lambda_j(F)}$ в $\mathbf{C}_p$ $\mathrm{v}_p(\alpha) = -\lambda_j(F)$.

Теорема Вейерштрасса ($\mathbf{C}_p$ - версия).
1) Пусть степенной ряд $F(T) \in 1 + T\mathbf{C}_p[[T]]$ таков, что $F(x)$ сходится при всех $x \mid \mathrm{v}_p(x) \geq -\lambda$. Положим $n(\lambda, F) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum\limits_{\lambda_j(F) \leq \lambda} l_j(F)$ (если в эту сумму входит длина максимального наклона, которая бесконечна, то будем считать, что соответствующая сторона заканчивается в последней лежащей на ней точке (i, a_i)). Тогда $\exists! H(T) \in 1+T\mathbf{C}_p[T]$, $\deg H = n(\lambda, F)$ и $G(T) \in 1+T\mathbf{C}_p[[T]]$ такие, что $F(T) = H(T)G(T)$, $G(x)$ также сходится при всех $x \ |\mathrm{v}_p(x) \geq -\lambda$ и не обращается там в 0. Многоугольник Ньютона полинома $H(T)$ совпадает с частью многоугольника Ньютона ряда $F(T)$ между точками $(0, 0)$ и $(n(\lambda, F), \mathrm{v}_p(a_{n(\lambda,F)}))$.
2) Пусть ряд $F(T) \in 1 + T\mathbf{C}_p[[T]]$ сходится при всех $x \in \mathbf{C}_p$, и $\{\alpha_k, 1 \leq k \leq \infty\}$ - упорядоченный по убыванию $\mathrm{v}_p(\alpha_k)$ список нулей функции $F(x)$. Тогда $\forall r \#(k|\mathrm{v}_p(\alpha_k) \geq r) < \infty$, и бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 - \alpha_k^{-1}x)$ сходится к $F(x)$ при всех $x \in \mathbf{C}_p$.