p-адические числа

Задачи.

Решения задач предпочтительнее всего набрать и прислать в pdf-виде. Если вы еще не очень хорошо освоились с набором, то можно разборчиво написать на бумаге и сделать читаемую скан- или фото-копию. Аккуратная письменная работа несколько уступает в удобстве проверки печатной, поскольку яркую копию сделать непросто. Однако печатная работа, в которой много опечаток, создает ещё больше проблем.

Дедлайн для задач 1-5: вторник, 28 сентября. Дедлайн можно отодвинуть, если у вас завал, но о том, что вы не успеваете (хоть и намерены сдать задание), меня следует предупредить.

1. Сконструируйте автоморфизм поля $k(T)$ такой,что его композиция с нормированием, задаваемым второй формулой (см п.6 из документа “Формулировки”), задается первой формулой.
2. Опишите пополнение $\widehat{k(T)}$ поля $k(T)$ относительно нормирования $|| \, ||_T$ ($P = T$ в п.6.1).
3. Докажите, что $\mathbf{Z}_p$ - компактное метрическое пространство в метрике, задаваемой $p-$адическим нормированием.
4. Рассмотрим специальный набор нормирований на $\mathbf{Q}$: $|| \, ||_\infty = | \, |$, а для каждого $p \;\; ||\cdot||_p = p^{-\mathrm{v}_p(\cdot)}$. Пусть $x \in \mathbf{Q}$. Докажите "формулу произведения" $||x||_\infty \prod\limits_p ||x||_p = 1$.
5. Докажите, что $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{Q}_p \;\; \mathrm{v}_p(z_1 + z_2) \geq \min(\mathrm{v}_p(z_1), \mathrm{v}_p(z_2))$ $(\mathrm{v}_p(0) \overset{\text{def}}{=} +\infty)$ (используйте определение v_p как длины “нулевого хвоста” целого p-адического числа, стандартно продолжая его на поле частных).
6. Проверьте, что $\mathrm{v}_p(i!) = \frac{1}{p-1}(i$ - сумма цифр i в p-ичной системе счисления).
7. Докажите,что любое $x \in \mathbf{Z}_p$ однозначно представляется в виде $x = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i p^i$, где $x_i \in \mathbf{Z}, \quad 0 \leq x_i \leq p - 1$.
8*. Докажите комбинаторно, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i}$ сходится к нулю 2-адически. Этот ряд получается из ряда для $\log(1 + x)$ при подстановке в него $x = -2$, т.е. представляет $\log(-1)$ в $\mathbf{Q}_2$

(продолжение на следующей странице)

Упражнения.

Упражнения полезно сделать, чтобы не оставлять ничего за спиной. Записывать и сдавать решения не нужно.

1. Проверьте, что вычет $a \mod p^i$ обратим в кольце $\mathbf{Z}/(p^i)$ тогда и только тогда, когда $a \not\equiv 0 \mod p$

Разберите доказательства следующих утверждений:

2. Кольцо нормирования неархимедова нормирования локально и целозамкнуто.
3. В поле с неархимедовым нормированием величиной любой ряд, члены которого стремятся к нулю, сходится.
4. В поле $\mathbf{R}$ функция $| \ |^\alpha$ задает нетривиальное нормирование тогда и только тогда, когда $0 < \alpha \leq 1$.
5. Лемма Гензеля.
6. Определение для $\alpha \in U_1$ гомоморфизма экспоненты $\exp_\alpha \ : p\mathbf{Z}_p \to U_1$ корректно (в частности, не зависит от выбора представителей $\widetilde{{}_i z}$).
7. При $\alpha \notin U_2$ (соответственно, $\alpha \equiv 5 \mod 8$ при $p = 2$) экспонента $\exp_\alpha$ задает изоморфизм $p\mathbf{Z}_p \to U_1$ (соответственно, $p^2\mathbf{Z}_p \to U_2$ при $p = 2$).