**Независимый Московский Университет,**
**Алгебраические кривые,** осень 2021

# 2

**2.1.** Приведите пример расширения поля $\Bbbk(x, y)$ степени трансцендентности 1, не являющегося конечно порождённым.

**2.2.** Обозначим $\Bbbk[[x]]$ кольцо формальных степенных рядов от $x$.
(а) Докажите, что *поле частных* $\mathfrak{ff}\big(\Bbbk[[x]]\big)$ изоморфно полю *рядов Лорана*

$$\Bbbk((x)) := \Big\{ \sum_{n>>-\infty} a_n x^n \Big| a_i \in \Bbbk \Big\}.$$

(б) Является ли расширение $\Bbbk((x)) \supset \Bbbk(x)$ конечно порождённым?
(в) Какова степень трансцендентности расширения $\Bbbk((x)) \supset \Bbbk(x)$?

**2.3.** (Первая задача из учебника И.Р. Шафаревича). Вычислите площадь петли *декартова листа*, то есть вещественной кривой, заданной уравнением $y^2 = x^3 + x^2$.
Указание. Воспользуйтесь параметризацией декартова листа, определяемой *пучком прямых* $y = tx$.

**2.4.** Докажите, что каждая аффинная *квартика Лежандра* $\ddot{\mathbf{E}}_k$, задаваемая уравнением

$$v^2 = (1 - u^2)(1 - k^2u^2),$$

бирационально изоморфна некоторой *кубике Лежандра* $\dot{\mathbf{E}}_t$, задаваемой уравнением

$$y^2 = x(x - 1)(x - t).$$

Указание. Воспользуйтесь дробно-линейным преобразованием вида $u = \frac{ax+b}{cx+d}$.

**2.5.** Убедитесь, что длина дуги эллипса, заданного вещественным уравнением $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$, сводится с помощью параметризации

$$X = a\cos t, Y = b\sin t$$

к интегрированию по кривой $\overset{....}{\mathbf{E}}_{ab}$, являющейся пересечением эллиптического цилиндра и сферы

$$\begin{cases} \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2 + b^2, \end{cases}$$

где $Z := \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$. Установите над $\mathbb{C}$ бирациональный изоморфизм кривой $\overset{....}{\mathbf{E}}_{ab}$ с подходящей квартикой Лежандра.

16 сентября, *Г.Б. Шабат*