Экзамен (дедлайн 14 декабря)

Задача 1. Докажите, что в банаховой алгебре не может быть элементов x, y, таких что $[x, y] = 1$.

$\mathcal{A}(\bar{\mathbb{D}})$ – алгебра непрерывных функций на $\bar{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ голоморфных в $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ с *sup*-нормой.

Задача 2. Докажите, что банахова $*$- алгебра A не является C^*-алгеброй

(a) $A = \mathcal{A}(\bar{\mathbb{D}})$ с инволюцией $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$;

(b) $l_1(G)$ с инволюцией $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$, где $G \neq \{e\}$ – дискретная группа.

Задача 3. Опишите явно GNS представление (H_f, Λ_f, π_f) C^*-алгебры A для

(a) $A = M_n$ ($n \times n$ матрицы с эрмитовым сопряжением), $f(X) = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(X)$;

(b) $A = C([0,1])$, $f(\phi) = \int\limits_0^1 \phi(x)dx$.

Задача 4. Пусть A C^*-алгебра и $u_1, \dots, u_n \in A$ – унитарные элементы, такие что $[u_i, u_j] = 0$ для всех i, j. Докажите, что существует единственный гомоморфизм $\varphi : C^*$-алгебр $C(\mathbb{T}^n) \to A$, такой что $\varphi(z_i) = u_i$, где $z_i : (t_1, \dots, t_n) \mapsto t_i, (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}^n$ (решение для $n = 1$ лучше, чем ничего, но стоит меньше баллов).