Листок 2

Задача 1. Приведите пример двух нормированных пространств X, Y и ограниченного биективного оператора $T : X \to Y$, не являющегося изоморфизмом в Nor (то есть, обратный не непрерывен).

Задача 2. Постройте изоморфизмы нормированных пространств

(а) $l_1 \cong c_0^*$ (б) $l_\infty \cong l_1^*$ (в) $l_p \cong l_q^*$ для $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Задача 3. Докажите, что если X^* сепарабельно, то X сеперабельно.

Указание: единичная сфера в X^* сепарабельна.

Задача 4. Постройте естественное преобразование $\alpha_X : X \to X^{**}$ тождественного функтора и функтора $** : Nor \to Nor$. Докажите, что α_X инъективеный и изометричный оператор.

Определение: Нормированное пространство X называется рефлексивным, если $\alpha_X : X \to X^{**}$ изоморфизм.

Задача 5.

(а) Докажите, что l_∞ не сепарабельно;

(б) Докажите, что c_0 не рефлексивно;

(в) Докажите, что l_1 не рефлексивно. *Указание: воспользуйтесь задачами 2 и 3.*

Для желающих разобраться с доказательством теоремы Хана-Банаха

Теорема (была доказана на лекции): пусть E вещественное нормированное пространство и E_0 его подпространство, тогда любой ограниченный функционал $f_0 : E_0 \to \mathbb{R}$ продолжается до функционала $f : E \to \mathbb{R}$, такого что $\|f\| = \|f_0\|$.

Теорема (предлагается доказать в задаче ниже): пусть E нормированное пространство и E_0 его подпространство, тогда любой ограниченный функционал $f_0 : E_0 \to \mathbb{C}$ продолжается до функционала $f : E \to \mathbb{C}$, такого что $\|f\| = \|f_0\|$.

Задача 6. Выведите теорему Хана-Банаха для нормированного пространства над $\mathbb{C}$ из вещественной версии.

Указание: для данного функционала $f_0 : E_0 \to \mathbb{R}$ рассмотрим $g_0 := \operatorname{Re} f_0$, продолжим функционал g_0 с сохранением нормы до $g : E \to \mathbb{R}$, пользуясь вещественной теоремой Хана-Банаха. Далее рассмотрим $f : E \to \mathbb{C}, f(x) = g(x) + ig(ix)$.