Семинар "Диофантови приближения"

23.09.2023

Ако f е достатъчно гладка

$f \in \underset{L^1}{C}(\mathbb{T}^1)$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

условие

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

$$S_q(\alpha) = \sum_{k=0}^{q-1} f(k\alpha)$$

+0

Вярно ли е, че

а) за п.в. α

$$\liminf_{q\to\infty} |S_q(\alpha)| < \infty$$

б) $\exists\, \alpha \notin \mathbb{Q}$ и

$$\lim_{q\to\infty} |S_q(\alpha)| < \infty$$

Ако $f \in C^{abs}(\mathbb{T}^1)$

Ако $S_q(\alpha, x) = \sum_{k=0}^{q-1} f(k\alpha + x)$

равном. по x

Теор Халсса: Если $\alpha \notin \mathbb{Q}$ для п.в. x

$S_q(\alpha x)$ $q \to \infty$

$(f \in L^1)$ осциллирует f слабом смысле.

Экскурс в матанализ.

Опр 1 $f(x) \in C^{abs}[\mathbb{T}]$

$\exists\ g = f' \in L^1$ п.в.

$$f(x) = c + \int_0^x g(t)\,dt$$

Опр 2 f $[0,1]$ функция ограниченной вариации

$\exists C : \forall\ x_i < x_{i+1}$

$$\sum_i |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \le C.$$

Теор $f \in C^{abs} \Rightarrow f$ огр. вариации.

$$\mathrm{Var}\, f = \int^1 |g(t)|\,dt$$

Замечание: обратное неверно. даже для $f \in C$

$?'(t) = 0$ п.в. $? \in C[0,1]$

Работа Пуанкаре 1885

"Sur les séries trig.."

О трип. рядах.

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A^k \sin \frac{t}{2^k}$$

$0 < A < 2$ — сх. абс.

$A > 1$ не сх. равномерно $t \in \mathbb{R}$

Пуанкаре: $t_0 \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$B = t_0 - \frac{4}{3} t_0^2 > 0$$

$$1 + \frac{1}{2B+1} < A < 2 \qquad h = \frac{2B}{2-A} - \frac{1}{A-1} > 0$$

Тогда
$$F(t) > \frac{1}{A-1} + hA^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

где $t : 2^n t_0 < t \le 2^{n+1} t_0$

Упр: доп пример Пуанкаре. $t \mapsto n = n(t)$

Следующий пример Пуанкаре.

D — не полный квадрат.

$$u^2 - Dv^2 = 1$$

$$\lambda = u - v\sqrt{D} \qquad \lambda^n = u_n - v_n\sqrt{D}$$

$$u_n, v_n \in \mathbb{Z}$$

$$F^*(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A^n \sin \lambda^n t$$

Если $1 < |A|$ $|\lambda A| < 1$ нет равномерно сходится

$$F^*(t) = \int_0^t f(\omega_1 s, \omega_2 s)\,ds$$

$\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{D}$ $\qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$

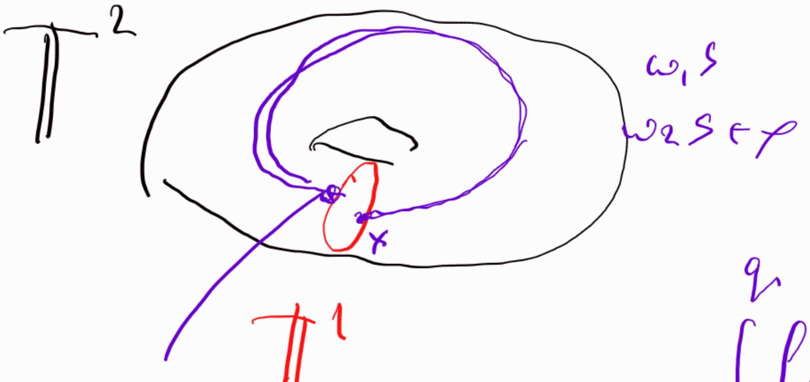
$$f(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} (A\lambda)^n \cos 2\pi(u_n x_1 - v_n x_2)$$

$$f(x_1, x_2) \in C[\mathbb{T}^2] \qquad |A\lambda| < 1$$

$$\alpha = \omega_2 = \omega_2/\omega_1$$

$$\boxed{f^*(x)} = \underbrace{\int_0^1 f(\omega_1 s, \omega_2 s + x)\,ds}_{}$$

непрерывна по x



$$\int_0^{q} f(\omega_1 s, \omega_2 s + x)\,ds =$$

$x + \omega_2 = x + \alpha$

$$\int_0 f(\omega_1 s, \omega_2 \ldots) ds$$

$$= \sum_{k=0}^{q-1} f(k\alpha + x)$$

$$= f(x) + f(x+\alpha)$$

$$\int_0^2 f(\omega_1 s, \omega_2 s + x) ds =$$

$$= \int_0^1 f(\omega_1 s, \omega_2 s + x) ds + \int_1^2 f(\omega_1 x, \omega_2 s + x) ds$$

$\omega_1 = 1$ $\omega_2 = \alpha$

$$\int_0^1 \quad \omega_2 + \omega_2 s + x)$$

Bepнo: $\omega_2(s+x) = \omega_2(s+1) + x =$

$= \omega_2 s + x + \alpha$

Вопрос Пуанкаре: правда ли

$f(x) \in C[\mathbb{T}^2]$

и $\alpha = \sqrt{2}$

$$\sum_{k=0}^{q-1} f(k\alpha) \to \infty \quad q \to \infty$$

1970 е Козлов + Кругин + Сидоров.

Теор Шмидта Если $f \in L[\Pi]$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \qquad \alpha \notin \mathbb{Q}.$$

$$\liminf_{q\to\infty} S_q = 0$$

Более того: $S_q(\alpha, x)$

$$\liminf_{q\to\infty} \sup_x |S_q(\alpha, x)| = 0$$

результат равномерен по начальной фазе.

Пусть $\frac{p_n}{q_n}$ — подх дроб к α

D_{q_n} = откл. посл $\{k\alpha\}_{k=1}^{q_n}$

$$D_{q_n} = \sup_\gamma |N_{q_n}(\gamma) - \gamma q_n| = O(1)$$

Неравенство Коксмы

$$\left| \sum_{k=1}^{q} g(k\alpha) - \underbrace{q\int_0^1 g(x)\,dx}_{0} \right| \le V[g]\, D_q$$

$f \in C^{abs}$ $\quad f' \in L^1$

$\forall \varepsilon \quad \exists G$ - триг полином:

$$\int_0^1 |f'(s) - G(s)|\, ds < \varepsilon.$$

$$g(x) = f'(s) - G(s)$$

$$\boxed{V[f-Q] \le \varepsilon}$$

рассм $Q(s)$ - триг. полином:

$$Q' = G.$$

$$\left| \sum_{k=1}^{q_n} f(\alpha k) - \sum_{k=1}^{q_n} Q(\alpha k) \right| \ll \varepsilon$$

$\forall \varepsilon: \exists Q$ - триг пол $\quad \forall n$

$$Q(x) = \sum_{|m| \le M} \Gamma_m e^{2\pi i m x}$$

коэфф триг. многочлена,

$$x = k\alpha$$

$$\sum_{k=1}^{q} Q(k\alpha) = \sum_m \Gamma_m \sum_{k=1}^{q} e^{2\pi i m k \alpha}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{q} e^{2\pi i m k\alpha}\right| \le \frac{\|mq\alpha\|}{\|m\alpha\|} \le$$

$$\sum e^{k\alpha} = \frac{e^{q\alpha}-1}{e^{\alpha}-1}$$

$$< \frac{m\,\|q\alpha\|}{\|m\alpha\|}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{q} Q(k\alpha)\right| \le \Big(\sum_{m} \frac{r_m\, m}{\|m\alpha\|}\Big)\|q\alpha\| \to 0$$

$$< \varepsilon$$

$|m| \le M$.

конечная сумма

$q = q_n$

оценка равномерная по n

$n \to \infty$

$$\varepsilon \longmapsto Q(\varepsilon) \quad M(\varepsilon)$$

$$q_n \to \infty$$

Величина зависит от ε.

Задача. Получить количественный вариант теор. Сидорова

Т... К... $\sigma(\varepsilon) > 0$

Теор Коксмы

Пусть $\sigma(q) = \bar{\bar{o}}(q)\cdot q \to \infty$

Теор Пусть $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$\exists f = f_\alpha \in C[\mathbb{T}]$ с $\int_0^1 f(x)\,dx$.

$\exists x$: $\exists q_0$

$$\sum_{k=1}^{q} f_\alpha(k\alpha + x) \geq q\cdot\sigma(q)$$

$$\forall q \geq q_0$$

Более того. HD(м. та X) $= 1$

Вопрос $\exists$ ли универсальная функция,

$\exists$ ли $f \in C$ $\forall \alpha$

Фон. $\forall \alpha \exists f$ $\exists f \forall \alpha$.

Теор: Пусть $f \in C[\mathbb{T}]$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

$\psi(t) \to \infty \quad t \to \infty$

Тогда $\exists\, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$$\liminf_{q \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{q} f(k\alpha)}{\psi(q)} = 0$$

Задача: зелен $\psi(q)$ на конеслгу

зелен $\exists$ на пол lee