Вступительный экзамен в аспирантуру НМУ

29 октября 1997 года

1. Объем выпуклого множества $K \subset \mathbb{R}^n$ равен V, а $(n-1)$-мерный объем его проекции на любую плоскость не меньше S. Докажите, что диаметр множества K не превосходит $n(V/S)$.

2. Эллипс с полуосями a и b расположен в первой четверти и касается координатных осей. Опишите множество возможных положений его центра.

3. Существует ли и единственно ли решение задачи Коши

$$x(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + y^3\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u|_{y=0} = 1$$

в окрестности точки $(x_0, 0)$ оси x?

4. Докажите, что существуют ненулевые дифференциальные операторы

$$A = a_0(x) + a_1(x)\frac{d}{dx} + \ldots + a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}$$

и

$$B = b_0(x) + b_1(x)\frac{d}{dx} + \ldots + b_m(x)\frac{d^m}{dx^m},$$

с полиномиальными коэффициентами, для которых

$$A \circ \frac{d}{dx} = B \circ x.$$

5. Равномерно ли распределена на отрезке $[0,1]$ последовательность $x_k = \left\{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k}\right\}$? (Последовательность называется равномерно распределенной, если для любого отрезка $\Delta \subset [0,1]$ верно $\lim\limits_{k\to\infty} N_k(\Delta)/k = |\Delta|$, где $N_k(\Delta)$ — число точек среди первых k элементов последовательности, попавших в Δ, а $|\Delta|$ — его длина.)

6. (а) Опишите, с точностью до изоморфизма, все двумерные алгебры Ли. (б) На каждой ли из них существует невырожденное биинвариантное скалярное произведение? (Скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на алгебре Ли называется биинвариантным, если $\langle[X,Y],Z\rangle + \langle Y,[X,Z]\rangle = 0$ для любой тройки векторов X, Y, Z.)

7. Значение многочлена $P = P(x)$ в точке x_0, для которой $P'(x_0) = 0$, называется критическим значением многочлена. Докажите, что t_0 является критическим значением многочлена $P(x)$

тогда и только тогда, когда t_0 — корень дискриминанта многочлена $P(x) - t$, рассматриваемого как многочлен от x. (Дискриминант многочлена — произведение попарных разностей его корней.)

8. Каким должно быть отношение толщины монеты к ее диаметру, чтобы при случайном бросании она выпадала на ребро с вероятностью $1/3$?

9. Найдите

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)}.$$

10. Найдите числа Бетти поверхности $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ в трехмерном проективном пространстве.