4. Локализация (часть 2)

Последовательные локализации

На этой лекции мы продолжим работу с операцией локализации. Начнем с такого невинного технического результата.

Лемма 4.1. *Пусть A — кольцо, M — модуль над A, и пусть $S \subset T$ — два мультипликативных подмножества в A; обозначим через $\varphi\colon A \to S^{-1}A$ канонический гомоморфизм. Тогда $T^{-1}A \simeq (\varphi(T))^{-1}(S^{-1}A)$ и $T^{-1}M \simeq (\varphi(T))^{-1}(S^{-1}M)$.*

Доказательство этой леммы можно спокойно предоставить читателю (указание: см. предложение 2.2).

Локальные кольца

Рассмотрим теперь локализации вида $A_{\mathfrak{p}}$, где $\mathfrak{p}$ — простой идеал в кольце A. Ввиду предложения 2.7 простые идеалы кольца $A_{\mathfrak{p}}$ соответствуют простым идеалам кольца A, содержащимся в $\mathfrak{p}$. Следовательно, в кольце $A_{\mathfrak{p}}$ имеется собственный идеал (а именно, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$), содержащий все остальные идеалы. Кольца, обладающие таким свойством, часто встречаются, и для них есть специальный термин.

Определение 4.2. Кольцо A называется *локальным*, если в нем имеется собственный идеал $\mathfrak{m}$, содержащий все остальные идеалы.

Очевидные равносильные условия: в кольце имеется только один максимальный идеал; в кольце имеется такой собственный идеал $\mathfrak{m}$, что все элементы из $A \setminus \mathfrak{m}$ обратимы. Этот идеал $\mathfrak{m}$ так и называется *максимальным идеалом локального кольца*, а факторкольцо $A/\mathfrak{m}$ (являющееся полем) называется *полем вычетов локального кольца.*

Примеры локальных колец. Мы уже отмечали, что всякое кольцо вида $A_{\mathfrak{p}}$ локально. В качестве более конкретных примеров можно рассмотреть:

- Кольцо целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p$;
- Кольцо формальных степенных рядов $k[[X_1, \ldots, X_n]]$, где k — поле (поскольку всякий степенной ряд с ненулевым свободным членом обратим, это кольцо локально с максимальным идеалом $(X_1, \ldots, X_n)$).
- Кольцо степенных рядов от n переменных с коэффициентами в $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), сходящихся в некоторой окрестности начала координат (максимальный идеал — тот же, что в предыдущем примере); по-другому это кольцо можно описать как кольцо ростков аналитических функций в начале координат.

- Кольцо ростков гладких (или непрерывных) функций в данной точке многообразия (или топологического пространства).

Основной технический результат о локальных кольцах называется леммой Накаямы. Эта лемма существует в нескольких вариантах, каждый из которых важен по-своему. В первом из этих вариантов от основного кольца даже не требуется быть локальным.

Предложение 4.3 (Лемма Накаямы I). *Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в кольце A и M — конечно порожденный A-модуль. Если $M \subset \mathfrak{a}M$, то существует элемент $f \in \mathfrak{a}$, для которого $(1+f)M = 0$.*

(Через $\mathfrak{a}M$ обозначается подмодуль в M, состоящий из всевозможных сумм $\sum f_i m_i$, где $f_i \in \mathfrak{a}$, $m_i \in M$; включение $\mathfrak{a}M \subset M$ выполняется, очевидно, всегда.)

Доказательство. Проведем индукцию по числу образующих модуля M. Пусть для всех модулей (над всеми кольцами), порожденных менее чем k элементами, предложение доказано, и пусть $m_1, \ldots, m_k$ — система образующих модуля M. Поскольку $m_1 \in \mathfrak{a}M$, имеем $m_1 = \sum f_i \mu_i$, где $f_i \in \mathfrak{a}$, $\mu_i \in M$; в силу нашего предположения имеем $m_i = \sum a_{ij} m_j$; подставляя, получаем, что

$$m_1 = g_1 m_1 + \ldots + g_k m_k \Leftrightarrow (1-g_1)m_1 = g_2 m_2 + \ldots + g_k m_k$$

(все g_j лежат в $\mathfrak{a}$). Модуль M_{1-g_1} над кольцом A_{1-g_1} также порожден элементами $m_1/1, \ldots, m_k/1$, но из формулы (4) следует, что в нем $m_1/1$ выражается через $m_2/1, \ldots, m_k/1$, так что он может быть порожден $k-1$ элементом. Поскольку $M \subset \mathfrak{a}M$, то и $M_{1-g_1} \subset \mathfrak{a}_{1-g_1} M_{1-g_1}$, и в силу предположения индукции имеем $aM_{1-g_1} = 0$, где $a = 1 + h/(1-g_1)^t$ для некоторых $h \in \mathfrak{a}$ и целого $t \geqslant 0$. Поскольку модуль M_{1-g_1} порожден элементами $m_1/1, \ldots, m_k/1$, найдтся такое $m > 0$, что $(1-g_1)^k((1-g_1)^t + h)m_j = 0$ для всех j. Ясно, что $b = (1-g_1)^k((1-g_1)^t + h) \in 1 + \mathfrak{a}$ и $bM = 0$. □

Предложение 4.4 (Лемма Накаямы II). *Пусть A — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и M — конечно порожденный A-модуль. Если $M = \mathfrak{a}M$, то $M = 0$.*

Доказательство. Из условия и предложения 4.3 следует, что $(1+f)M = 0$ для некоторого $f \in \mathfrak{m}$. Заметим, что $1+f$ является обратимым элементом кольца A: в противном случае главный идеал $(1+f)$ был бы отличен от A и тем самым содержался в (единственном!) максимальном идеале $\mathfrak{m}$, так что из включений $1+f \in \mathfrak{m}$ и $f \in \mathfrak{m}$ следовало бы невозможное $1 \in \mathfrak{m}$. Стало быть, $M = (1+f)^{-1}(1+f)M = 0$. □

Предложение 4.5 (Лемма Накаямы III). *Пусть A — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и M — конечно порожденный A-модуль. Если элементы $m_1, \dots, m_k \in M$ таковы, что их образы в $M/\mathfrak{m}M$ порождают $M/\mathfrak{m}M$, то элементы $m_1, \dots, m_k$ порождают модуль M.*

Доказательство. Пусть $M' \subset M$ — подмодуль, порожденный $m_1, \dots, m_k$. Тогда модуль M/M' конечно порожден, и из условия вытекает, что $M/M' = \mathfrak{m}(M/M')$. Следовательно, $M/M' = 0$. □

Условие конечной порожденности модуля M в лемме Накаямы является существенным. В самом деле, пусть A — кольцо ростков C^∞-функций на $\mathbb{R}$ в окрестности нуля и $I \subset A$ — идеал, состоящий из ростков функций с нулевым рядом Тейлора. Как известно, $I \neq 0$, но при этом если $f \in I$, то функция f/x, доопределенная нулем в нуле, также имеет нулевой ряд Тейлора, так что $I = \mathfrak{m}I$. Стало быть, кольцо A не является нётеровым (как не является таковым и кольцо ростков гладких функций от n переменных). Отметим, что кольцо ростков *аналитических* функций (от любого числа переменных) нётеровым является.

Локальные свойства модулей

Иногда можно делать заключения о поведении колец или модулей на основании информации о свойствах их локализаций во всевозможных простых идеалах. Вот несколько примеров того, как работает этот принцип.

Предложение 4.6. *Пусть M — модуль над кольцом A. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) $M = 0$;

(2) $M_\mathfrak{p} = 0$ *для всякого простого идеала* $\mathfrak{p} \subset A$;

(3) $M_\mathfrak{m} = 0$ *для всякого максималього идеала* $\mathfrak{m} \subset A$.

Доказательство. Только импликация (3) $\Rightarrow$ (1) нуждается в доказательстве. Предположим, что выполнено (3), и пусть $M \neq 0$; тогда найдется элемент $m \in M$, для которого идеал $\operatorname{Ann}(m) = \{f \in A \mid fm = 0\}$ отличен от всего A; значит, $\operatorname{Ann}(m) \subset \mathfrak{m}$ для некоторого маскимального идеала $\mathfrak{m}$. Тем самым $sm \neq 0$, если $s \notin \mathfrak{m}$, так что $0 \neq m/1 \in M_\mathfrak{m}$ — противоречие. □

Предложение 4.7. *Пусть $\varphi\colon M \to N$ — гомоморфизм A-модулей. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) φ *инъективен (соотв. сюръективен, биективен);*

(2) *индуцированный гомоморфизм* $\varphi_\mathfrak{p}\colon M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ *инъективен (соотв. сюръективен, биективен) для всякого простого идеала* $\mathfrak{p} \subset A$*;*

(3) *индуцированный гомоморфизм* $\varphi_\mathfrak{m}\colon M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ *инъективен (соотв. сюръективен, биективен) для всякого максимального идеала* $\mathfrak{p} \subset A$.

Доказательство. Опять достаточно доказать, что (3) $\Rightarrow$ (1). Запишем стандартную точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Ker}(\varphi) \to M \xrightarrow{\varphi} N \to \mathrm{Coker}(\varphi) \to 0.$$

Из предложения 2.6 вытекает, что точна последовательность

$$0 \to (\mathrm{Ker}(\varphi))_\mathfrak{m} \to M_m \xrightarrow{\varphi_\mathfrak{m}} N_\mathfrak{m} \to (\mathrm{Coker}(\varphi))_\mathfrak{m} \to 0.$$

Если $\varphi_\mathfrak{m}$ инъективен (соотв. сюръективен) для всех максимальных $\mathfrak{m}$, то $(\mathrm{Ker}(\varphi))_\mathfrak{m} = 0$ (соотв. $(\mathrm{Coker}(\varphi))_\mathfrak{m} = 0$) для всех максимальных $\mathfrak{m}$, откуда, ввиду предложения 4.7, $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ (соотв. $\mathrm{Coker}(\varphi) = 0$), так что φ инъективен (соотв. сюръективен). $\square$

У предложения 4.6 есть такое полезное обобщение:

Предложение 4.8. *Пусть M — модуль над A и $f \in A$. Тогда $M_f = 0$ в том и только том случае, когда $M_\mathfrak{p} = 0$ для всех простых $\mathfrak{p} \in D(f)$.*

Доказательство. В свете леммы 4.1 (примененной к случаю $S = \{1, f, f^2, \ldots\}$ и $T = A \setminus \mathfrak{p}$) это вытекает из предложения 4.6. $\square$

Следствие 4.9. *Пусть $f_i \in A$ — такое семейство элементов, что $\mathrm{Spec}(A) = \bigcup D(f_i)$, и пусть $\varphi\colon M \to N$ — гомоморфизм A-модулей. Тогда φ инъективен (соотв. сюръективен, биективен) тогда и только тогда, когда для всякого i индуцированный гомоморфизм $M_{f_i} \to N_{f_i}$ инъективен (соотв. сюръективен, биективен).*

Доказательство аналогично доказательству предложения 4.7.

В связи с предложением 4.6 уместно дать следующее определение.

Определение 4.10. Пусть M — модуль над кольцом A. Тогда его *носителем* называется множество

$$\mathrm{supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A \mid M_\mathfrak{p} \neq 0\} \subset \mathrm{Spec}\, A.$$

Как мы видели, $M = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{supp}(M) = \varnothing$.

В общем случае ничего интересного про носитель модуля сказать нельзя. Если, однако, модуль конечно порожден, то его носитель каким попало быть не может:

Предложение 4.11. *Если модуль M конечно порожден, то* $\operatorname{supp}(M) = V(\operatorname{Ann}(M))$, *где*

$$\operatorname{Ann}(M) = \{f \in A \mid fM = 0\} \subset A.$$

В частности, носитель конечно порожденного модуля замкнут.

(Идеал $\operatorname{Ann}(M)$ называется *аннулятором* модуля M).

Доказательство. Если $\mathfrak{p} \notin V(\operatorname{Ann}(M))$, то существует элемент $f \in \operatorname{Ann}(M)$, не содержащийся в $\mathfrak{p}$, и для всякого $m/s \in M_\mathfrak{p}$ имеем $m/s = fm/fs = 0$, так что $M_\mathfrak{p} = 0$ (конечной порожденностью M мы пока не пользовались).

Обратно, пусть $M_\mathfrak{p} = 0$ и M порожден элементами $m_1, \ldots, m_k$. Поскольку образ каждого из m_i в $M_\mathfrak{p}$ равен нулю, существуют такие элементы $f_1, \ldots, f_k \notin \mathfrak{p}$, что $f_i m_i = 0$ для всех i. Произведение $f = f_1 \ldots f_k$ аннулирует все образующие $m_1, \ldots, m_k$, так что $f \in \operatorname{Ann}(M)$, и с другой стороны это произведение не лежит в простом идеале $\mathfrak{p}$, то есть $\operatorname{Ann}(M) \not\subset \mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p} \notin V(\operatorname{Ann}(M))$. □

Поскольку для всякого идеала $\mathfrak{a} \subset A$ имеем, очевидно, $\operatorname{Ann}(A/\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, всякое замкнутое по Зарисскому подмножество в $\operatorname{Spec} A$ является носителем некоторого конечно порожденного модуля.

Приведем одно приложение предложения 4.11.

Предложение 4.12. *Пусть M — конечно порожденный модуль над нётеровым кольцом A, и пусть $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Если $M_\mathfrak{p}$ является свободным $A_\mathfrak{p}$ модулем, то существует такой элемент $f \in A$, что $\mathfrak{p} \in D(f)$ и при этом M_f является свободным A_f-модулем.*

Неформально говоря, в нётеровом случае свойство «быть свободным модулем» распространяется с локализации в точке на локализацию в главном открытом множестве.

Доказательство. Можно, очевидно, считать, что базис свободного $A_\mathfrak{p}$-модуля $M_\mathfrak{p}$ имеет вид $m_1/1, \ldots, m_r/1$, где $m_i \in M$. Обозначим через $\varphi\colon A^r \to M$ гомоморфизм, при котором j-й базисный вектор переходит в m_j; тогда индуцированный гомоморфизм $\varphi_\mathfrak{p}\colon A_\mathfrak{p}^r \to M_\mathfrak{p}$ является изоморфизмом. Поскольку стандартная точная последосвтельность

$$0 \to \operatorname{Ker}(\varphi) \to A^r \xrightarrow{\varphi} M \to \operatorname{Coker}(\varphi) \to 0$$

остается точной и после локализации, имеем $(\operatorname{Ker}(\varphi))_\mathfrak{p} = (\operatorname{Coker}(\varphi))_\mathfrak{p} = 0$. Поскольку из нётеровости вытекает, что модули $\operatorname{Ker}(\varphi)$ и $\operatorname{Coker}(\varphi)$ конечно порождены, их носители замкнуты, так что существует главное открытое множество $D(f) \ni \mathfrak{p}$, не пересекающееся с этими носителями. Ввиду предложения 4.8 отсюда вытекает, что $(\operatorname{Ker}(\varphi))_f = \operatorname{Coker}(\varphi)_f = 0$, так что индуцированный гомоморфизм $\varphi_f\colon A_f^r \to M_f$ является изоморфизмом. □