НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия.
Повторный экзамен. 9.10.2010.

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо сдать <u>*не позднее*</u>*, чем 12:00 25 октября.*

Убедительная просьба решать самостоятельно и не откладывать на последний день.

Для того, чтобы экзамен был засчитан, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее половины задач (в задачах из нескольких пунктов каждый пункт решено считать отдельной задачей).

Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно».

Задача 1. Рассмотрим кривую, у которой кривизна не обращается в ноль. Пусть $\mathbf{w}$ некоторый постоянный вектор. Доказать, что если в каждой точке кривой соответствующая нормальная плоскость (то есть плоскость, порождённая векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ из репера Френе) содержит вектор $\mathbf{w}$, то кривая плоская *(5 баллов).*

Задача 2. Пусть $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e_2}$ образуют ортонормальный базис в касательном пространстве в точке p двумерной поверхности в $\mathbb{E}^3$. Докажите, что

$$H = \mathbf{II}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + \mathbf{II}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2).$$

(5 баллов).

Задача 3. Левоинвариантная метрика на группе Ли G называется *биинвариантной метрикой*, если не только все левые сдвиги L_g являются изометриями, но и все правые сдвиги $R_g : G \longrightarrow G$ также являются изометриями. Нетрудно показать, что левоинвариантная метрика $\langle\, , \rangle$ на группе Ли G является биинвариантной тогда и только тогда, когда соответствующее евклидово скалярное произведение на алгебре Ли $\langle\, , \rangle_e$ для любых ξ, η и $\zeta \in \mathfrak{g}$ удовлетворяет тождеству

$$\langle [\xi, \eta], \zeta \rangle_e + \langle \eta, [\xi, \zeta] \rangle_e = 0. \tag{1}$$

Доказать, что скалярное произведение

$$\langle \xi, \eta \rangle_e = \operatorname{tr} \xi \eta^T \tag{2}$$

на $\mathfrak{so}(n)$ невырожденно, положительно определено и удовлетворяет тождеству (1), а поэтому соответствующая левоинвариантная метрика на $\mathrm{SO}(n)$ является биинвариантной *(5 баллов).*

Задача 4. Построить биинвариантную метрику на группе Ли $\mathrm{U}(n)$ *(5 баллов).*

Задача 5. Доказать, что в любой точке p группы Ли G с биинвариантной метрикой секционная кривизна в направлении любой 2-плоскости в T_pG неотрицательна *(20 баллов).*

Задача 6. Доказать, что $\mathrm{SO}(3)$ с метрикой, соответствующей скалярному произведению (2), является пространством постоянной кривизны, то есть доказать, что секционная кривизна группы $\mathrm{SO}(3)$ является константой, то есть не зависит ни от точки, ни от выбранной двумерной плоскости в касательном пространстве. Найти эту константу *(15 баллов).*

Задача 7. Найти класс Чженя касательного расслоения $T\mathbb{C}P^1$ и число Чженя $\langle c_1(T\mathbb{C}P^1), [\mathbb{C}P^1] \rangle$. *(20 баллов)*