НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 6.
Векторные расслоения-II. 19.03.2012.

Задача 1. Пусть $E \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ универсальное (тавтологическое) расслоение. Доказать, что сумма $T(\mathbb{R}P^n)$ и тривиального расслоения ранга 1 изоморфна $\underbrace{E^* \oplus \cdots \oplus E^*}_{n+1 \text{ раз}}$.

Задача 2. Пусть $V_k(\mathbb{R}^N) \longrightarrow G_k(\mathbb{R}^N)$ естественное расслоение многообразия Штифеля над многообразием Грассмана. Каков его слой? Найти соответствующее ассоциированное векторное расслоение (то есть векторное расслоение с теми же склеивающими коциклами).

Задача 3. Пусть Y — подмногообразие X. Тогда для каждой точки $x \in Y$ можно определить векторное пространство $N_x := T_xX/T_xY$. Определите на дизъюнктном объединении $NY = \bigsqcup_{x \in Y} N_x$ естественную структуру гладкого многообразия и локально тривиального векторного расслоения над Y. Это расслоение называется нормальным расслоением.

Задача 4. Найдите нормальное расслоение к M при диагональном вложении $M \hookrightarrow M \times M$, то есть $x \mapsto (x, x)$.

Задача 5. Найдите нормальное расслоение к $\mathbb{R}P^n$ при естественном вложении $\mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$.

Задача 6. Докажите, что сумма касательного расслоения к двумерной сфере и тривиального расслоения ранга 1 является тривиальным расслоением ранга 3.

Задача 7. Пусть $E_k \longrightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$ универсальное (тавтологическое) расслоение. Пусть однородные координаты точек $G_k(\mathbb{R}^n)$ задаются с помощью $k \times n$ матрицы Z, то есть точка есть класс эквивалентности $[Z]$ относительно отношения эквивалентности $Z \sim gZ$, $g \in GL(k)$. Доказать, что задающий $E_k \subset G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ ортогональный проектор $P_{[Z]} : \mathbb{R}^n \longrightarrow (E_k)_{[Z]}$ задается формулой $P(v) = vZ^*(ZZ^*)^{-1}Z$, где Z^* означает сопряженный оператор, а элемент $\mathbb{R}^n$ записан как вектор-строка v.

Задача 8. Пусть $E \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ универсальное (тавтологическое) расслоение. Тривиально ли $E \otimes E$?

Задача 9. Доказать, что в любом векторном расслоении существует метрика, евклидова в вещественном случае и эрмитова в комплексном случае.

Задача 10. Найти (с точносью до изоморфизма) все одномерные вещественные расслоения над $\mathbb{R}P^1$.