Модули

Задача 3.0. A-модуль порожден одним элементом тогда и только тогда, когда он изоморфмен модулю вида A/I.

Задача 3.1. Пусть M и N подмодули A-модуля L. Докажите, что
а) $(M+N)/N \cong M/(M\cap N)$; б) $(M+N)/(M\cap N) \cong M/(M\cap N)\oplus N/(M\cap N)$.

Задача 3.2. а) Если в кольце главных идеалов элементы p и q различные простые ($pA \neq qA$), то идеалы pA и qA взаимно просты.

б) Приведите пример факториального кольца и двух различных простых элементов p и q, таких что идеалы pA и qA не взаимно просты.

в) Приведите пример факториального кольца A и подмодуля свободного A-модуля, не являющегося свободным.

Задача 3.3. а) Найдите матрицу оператора умножения на x в пространстве $k[x]/(a_nx^n+\dots+a_1x+a_0)$ ("фробениусова клетка").

б) В подходящем базисе любой оператор (над произвольным полем) записывается блочно-диагональной матрицей из фробениусовых клеток.

Абелевы группы

Задача 3.4. При каких m и n группы $\mathbb{Z}/m\oplus\mathbb{Z}/n$ и $\mathbb{Z}/mn$ изоморфны?

Задача 3.5. Пусть G — конечная абелева группа, $d_G(n)$ — количество ее элементов, аннулируемых умножением на n.

а) Если $d_G(n)\leqslant n$, то группа G циклическая.

б) Пусть $d_G(n)=d_H(n)$ для всех натуральных n. Верно ли, что группы G и H изоморфны?

в) Конечная подгруппа мультипликативной группы поля является циклической.

▷ Если у группы G есть нормальная подгруппа H_1, фактор по которой изоморфен H_2, то говорят, что G является *расширением* группы H_2 с помощью группы H_1 и пишут

$$0\to H_1\to G\to H_2\to 0.$$

▷ Далее p и q — различные простые числа.

Задача 3.6. Классифицируйте все абелевы расширения группы $\mathbb{Z}/2p$ с помощью группы $\mathbb{Z}/2q$.

Задача 3.7. а) Докажите, что группа порядка p^2 абелева.

б) Классифицируйте все группы порядка pq.

Задача 3.8. Докажите, что группа порядка p^n имеет нетривиальный центр.