

## Группы Галуа

**Задача 6.1.** Пусть  $p_1, \dots, p_n$  — различные простые числа.

- Докажите, что расширение  $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})/\mathbb{Q}$  имеет степень  $2^n$ , найдите группу Галуа этого расширения и все его подрасширения.
- Докажите, что число  $\sqrt{p_1} + \dots + \sqrt{p_n}$  порождает последнее расширение.

**Задача 6.2.** Пусть  $L$  — поле разложения неприводимого над  $K$  ( $\text{char } K \neq 2, 3$ ) многочлена 3 степени. Найдите группу Галуа а)  $L/K(d)$ ; б)  $L/K$ .

- Чему равен дискриминант уравнения  $x^3 + px + q = 0$ ?
- Как решать кубическое уравнение в радикалах?

**Задача 6.3.** Пусть  $L$  — поле разложения неприводимого над  $K$  ( $\text{char } K \neq 2, 3$ ) многочлена 4 степени,  $x_i$  — корни этого многочлена.

- $S_4/V_4 \cong S_3$  (где  $V_4$  — группа, порожденная двойными транспозициями).
- Укажите 4 линейные комбинации элементов  $x_i$ , которые порождают поле  $L$ , а квадраты которых инвариантны относительно действия  $V_4$ .
- Как решать уравнение 4 степени в радикалах?

▷ В последних пунктах задач 6.2 и 6.3 явные формулы не требуются.

**Задача 6.4.** Пусть  $L$  — поле разложения многочлена  $x^4 - x^2 - 1$  над  $\mathbb{Q}$ .

- Найдите степень  $[L : \mathbb{Q}]$ .
- Укажите в  $L/\mathbb{Q}$  подрасширение, не являющееся расширением Галуа.
- Найдите группу Галуа расширения  $L/\mathbb{Q}$ .

**Задача 6.5.** Пусть  $\text{char } K \neq p$ .

- Если поле  $K$  содержит корень степени  $p$  из единицы, то многочлен  $x^p - a$  либо неприводим, либо раскладывается на линейные множители.
- Если многочлен  $x^p - a$  не имеет корней, то он неприводим.

**Задача 6.6.** Пусть  $\text{char } K = p$ .

- Если многочлен  $x^p - x - a = 0$  не имеет корней, то он неприводим.
- Найдите соответствующую группу Галуа.

**Задача 6.7.** Пусть любой многочлен нечетной степени над полем  $R$  имеет корень.

- Степень любого расширения Галуа  $E/R$  является степенью двойки.
- Если  $C/R$  — квадратичное расширение, в котором из любого элемента можно извлечь квадратный корень, то поле  $C$  алгебраически замкнуто.