# Кольца целых

**Задача 8.1.** Пусть $L$ — конечное расширение поля частных целостного кольца $A$. Тогда для любого элемента $x \in L$ существует такое $c \in A$, что $cx$ цел над над $A$.

**Задача 8.2.** Пусть $A \subset B$ — расширение колец, $S$ — мультипликативное подмножество $A$.

а) Если $B$ цело над $A$, то $S^{-1}B$ цело над $S^{-1}A$.

б) Если $A$ целозамкнуто в $B$, и $B$ целостное, то $S^{-1}A$ целозамкнуто в $S^{-1}B$.

**Задача 8.3.** Пусть $A \subset B$ — конечное расширение колец, $A$ — кольцо главных идеалов, кольцо $B$ целозамкнуто. Тогда $B$ — свободный $A$-модуль.

$\triangleright$ Пусть $K$ — числовое поле (конечное расширение поля $\mathbb{Q}$). Целое замыкание $\mathbb{Z}$ в $K$ называется *кольцом целых* поля $K$ и обозначается $\mathcal{O}_K$.

**Задача 8.4.** Найдите кольцо целых в $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где $d$ — целое число, свободное от квадратов.

**Задача 8.5.** Элемент $a \in \mathcal{O}_K$ обратим в тогда и только тогда, когда $N_{K/\mathbb{Q}}(a) = \pm 1$.

**Задача 8.6.** Пусть $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ ($p$ — простое нечетное).

а) Найдите двойственный базис относительно скалярного произведения $(a, b) = \mathrm{Tr}(ab)$ к базису $1, \zeta_p, \dots, \zeta_p^{p-2}$.

б) Если $a = a_0 + a_1\zeta_p + \dots + a_{p-2}\zeta_p^{p-2}$ цел, то $pa_i \in \mathbb{Z}$.

в) Элементы $\frac{1-\zeta_p^k}{1-\zeta_p}$ и $\frac{(1-\zeta_p)^{p-1}}{p}$ обратимы в $\mathcal{O}_K$.

г) Если $a \in \mathbb{Z}$ делится на $1 - \zeta_p$ в $\mathcal{O}_K$, то $a$ делится на $p$.

д) $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta_p]$.