НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 1.
Кривые в плоскости и n-мерном евклидовом пространстве. 11.02.2013.

Для получения зачёта в каждом из листков необходимо решить не менее трёх задач.

Задача 1. Доказать, что кривизна плоской кривой

$$\mathbf{r}(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2,$$

где t — произвольный параметр, может быть найдена по формулам

$$k = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

и

$$k = \frac{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}, \tag{1}$$

где $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ обозначает векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Доказать, что кривизна пространственной кривой

$$\mathbf{r}(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3,$$

где t — произвольный параметр, может быть найдена по формуле (1), а кручение — по формуле $\varkappa = \dfrac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|^2}$, где $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ обозначает смешанное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, то есть ориентированный объём параллелепипеда, порождённого этими векторами.

Задача 2. Пусть три точки на плоской кривой лежат в общем положении, то есть не на одной прямой. Тогда через них можно провести единственную окружность. Устремим все три точки теперь к какой-то одной точке P на данной кривой. Найти радиус предельной окружности.

Задача 3. Доказать, что если кривизна кривой тождественно равна нулю, то это прямая.

Доказать, что если кручение кривой тождественно равно нулю, то эта кривая лежит в плоскости.

Доказать, что кривая постоянной кривизны, лежащая на сфере, является окружностью.

Задача 4*. Доказать, что если кривая с $k \neq 0$, $\varkappa \neq 0$ лежит на сфере радиуса R, то

$$R^2 = \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{(k')^2}{(\varkappa k)^2}\right), \tag{2}$$

где $'$ обозначает производную по отношению к натуральному параметру. Доказать, что если ещё и $k' \neq 0$, то и обратное верно: из тождества (2) следует, что кривая лежит на некоторой сфере радиуса R.

Задача 5*. Доказать, что выпуклая замкнутая гладкая плоская кривая имеет не менее 4 точек экстремума кривизны.

Задача 6. Рассмотрим кривую в $\mathbb{E}^n$, параметризованную произвольным параметром t. Пусть $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ обозначает ориентированный объём k-параллелепипеда, порожденного системой векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$. Пусть

$$V_i = \left(\frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^i x}{dt^i}\right).$$

Доказать, что кривизну и высшие кручения можно найти по формулам

$$k = \frac{V_2}{V_1^3}, \quad \varkappa_i = \frac{V_{i+2}V_i}{V_{i+1}^2 V_1}.$$