2. Гомеомеорфизмы двумерных поверхностей. 14 февраля 2013

Замечание. *Линзы $L(p,q)$ и $L(p,q')$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда $q \equiv \pm q' \pmod p$ или $qq' \equiv \pm 1 \pmod p$. В частности, линзы $L(7,1)$ и $L(7,2)$ гомотопически эквивалентны, но не гомеоморфны.*

Задача 1. Докажите, что можно считать, что гомеоморфизм, склеивающий края тел с ручками, сохраняет ориентацию. (То есть если добавить гомеоморфизмы, обращающие ориентацию, то новых многообразий не появится.)

Определение 1. *Изотопия — это гомотопия в классе гомеоморфизмов.*

Задача 2. Докажите, что склейка тел с ручками по двум изотопным гомеоморфизмам даёт гомеоморфные трёхмерные многообразия.

Задача 3. Докажите, что стандартно вложенная в S^3 сфера с ручками разбивает её на два тела с ручками.

Скручивания Дена

Простейший гомеоморфизм поверхности на себя, не изотопный тождественному, устроен следующим образом. Разрежем поверхность по кривой γ, которая её не разбивает. В результате получится два экземпляра кривой γ. Один из них закрепим, а другой повернём на 360° вдоль себя; близлежащие точки поверхности при этом потянутся за кривой. После этого поворота все точки кривой вернутся на свои места, и мы можем снова склеить оба экземпляра кривой. В результате получим гомеоморфизм поверхности на себя, называемый *скручиванием Дена* вдоль кривой γ (на самом деле есть два разных скручивания Дена вдоль одной кривой — в разных направлениях).

Задача 4. Докажите, что скручивание Дена вдоль меридиана тора не изотопно тождественному гомеоморфизму.

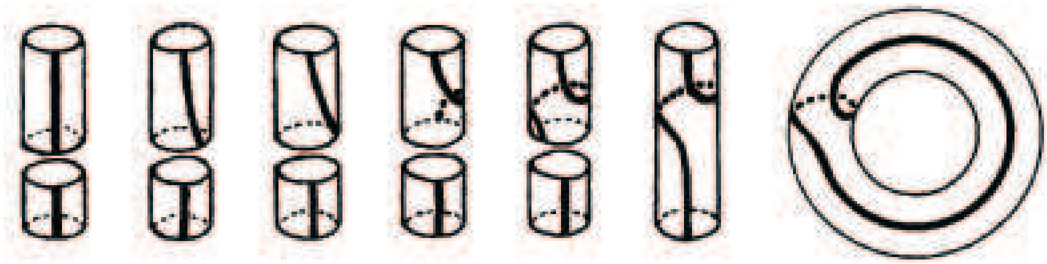

Рис. 1. Скручивание Дена

Задача 5. А что получится, если разрезать поверхность по кривой, разбивающей её?

Теорема 1. *Любой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм замкнутой двумерной ориентируемой поверхности можно представить в виде композиции скручиваний Дена и гомеоморфизмов, изотопных тождественному.*

Первым эту теорему доказал Ден (1910), но у него были существенные пробелы в доказательстве. Полное доказательство дал Ликориш (Lickorish, 1962). Ликориш доказал также, что в качестве образующих можно взять конечный набор скручиваний Дена (1964). Соотношения между этими образующими нашёл Wajnrib (1983).

Ориентируемое трёхмерное многообразие — граница четырёхмерного

Прежде чем доказывать теорему Дена–Ликориша, выведем из неё важное следствие.

Теорема 2. *Любое замкнутое ориентируемое трёхмерное многообразие получается из сферы S^3 посредством вырезания из сферы нескольких полноторий и последующего приклеивания их по другим гомеоморфизмам краёв.*

Многообразие M^3 получается в результате склейки двух тел с g ручками. Представим сферу S^3 в виде объединения двух тел с g ручками. Таким образом, M^3 получается из S^3 следующим образом: сфера разрезается на два тела с ручами и они склеиваются снова, но не

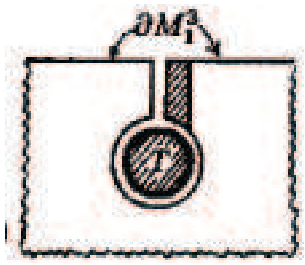

Рис. 2. Срез, перпендикулярный кривой γ

по тому же самому гомеоморфизму, а предварительно делается ещё какой-то гомеоморфизм. Сначала рассмотрим случай, когда этот гомеоморфизм — скручивание Дена вдоль кривой γ. Вдавим эту кривую в тело с ручками в направлении нормали к границе, а затем рассмотрим ε-окрестность сдвинутой кривой. Сделаем разрез по границе ε-окрестности и по поверхности, заметаемой кривой в процессе движения (рис. 2)

Скручивание Дена продолжим с поверхности вглубь, до самого разреза, воспользовавшись тем, что полноторие вырезано. Потом полноторие можно вклеить снова. При этом оно будет вклеено по другому гомеоморфизму краев. По сути дела, скручивание, происходящее на крае тела с ручками выдавливается на границу полнотория.

Чтобы сделать то же самое для композиции нескольких скручиваний Дена, нужно соответствующие полнотория сделать очень тонкими и расположить их на разных расстояниях от края; тогда они не будут пересекаться.

В свою очередь, из теоремы 2 можно вывести следующее.

Теорема 3. *Любое замкнутое ориентируемое трёхмерное многообразие является границей некоторого четырёхмерного многообразия.*

Внимательное изучение перестройки, которая происходит при переклейке полнотория, показывает, что эта перестройка устроена так: меридиан вырезанного полнотория приклеивается к параллели края. При этом надо заметить, что закручивание параллели в меридиональном направлении не меняет многообразие. На рисунке 3 кривая a —

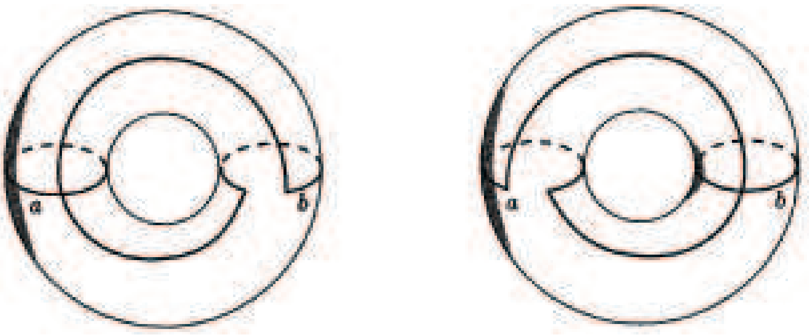

Рис. 3. Перестройка

меридиан полнотория, кривая b становится меридианом после скручивающего гомеоморфизма.

Такие перестройки переводят край многообразия размерности 4 в край другого многообразия. Эти многообразия размерности 4 получаются друг из друга следующей перестройкой, которую удобно описать в общем виде (нас интересует случай $p = q = 1$). Вырезаем $D^{p+1} \times S^q$ и вместо него вклеиваем $S^p \times D^{q+1}$ (край у них общий — $S^p \times S^q$).

Теперь несколько задач связанных с тем, какие многообразия являются краями других многообразий, а какие нет.

Задача 6. Докажите, что эйлерова характеристика замкнутого многообразия нечётной размерности равна нулю.

Задача 7. Докажите, что если многообразие M является краем некоторого многообразия, то эйлерова характеристика многообразия M чётна.

Задача 8. Докажите, что если на замкнутом многообразии есть инволюция без неподвижных точек, то оно является краем некоторого многообразия.

Задача 9. Постройте инволюции без неподвижных точек на следующих многообразиях: а) бутылка Клейна; б) $\mathbb{R}P^{2n+1}$, в) $\mathbb{C}P^{2n+1}$; г) произвольная компактная группа Ли.

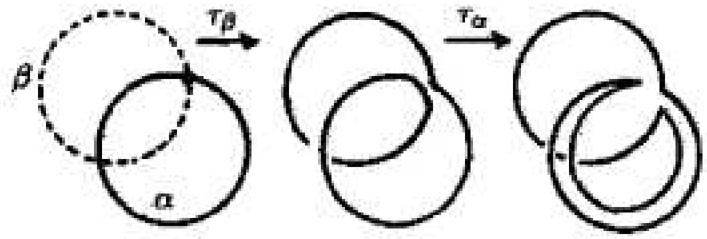

Рис. 4. Случай 1

Доказательство теоремы Дена–Ликориша

Теорему Дена–Ликориша удобнее доказывать в более общей формулировке — для многообразий с краем.

Теорема 4. *Пусть F — компактная ориентируемая двумерная поверхность с краем. Тогда любой гомеоморфизм h поверхности F на себя, тождественный на крае, изотопен композиции скручиваний Дена. (Если край пуст, то дополнительно нужно потребовать, что гомеоморфизм сохраняет ориентацию.)*

Лемма 1. *Пусть α и β — замкнутые кривые на F, каждая из которых не разбивает F. Тогда α можно перевести в β композицией скручиваний и изотопий.*

Случай 1. Кривые α и β транверсально пересекаются ровно в одной точке. Тогда композиция скручиваний Дена вдоль кривых α и β переводит кривую α в кривую β (рис. 4).

Случай 2. Кривые α и β не пересекаются. Тогда существует кривая γ, трансверсально пересекающая каждую из кривых α и β в одной точке. Для доказательства нужно рассмотреть два случая: кривые α и β могут либо разбивать поверхность, либо не разбивать её (рис. 5).

Случай 3. Кривые α и β пересекаются более чем в одной точке. В этом случае существует кривая γ, которая не разбивает поверхность, пересекает α не более чем в одной точке и пересекает β в меньшем числе точек, чем кривая α.

Из леммы теорема Дена–Ликориша выводится следующим образом. Поверхность F — сфера с g ручками и некоторым числом дырок. Её

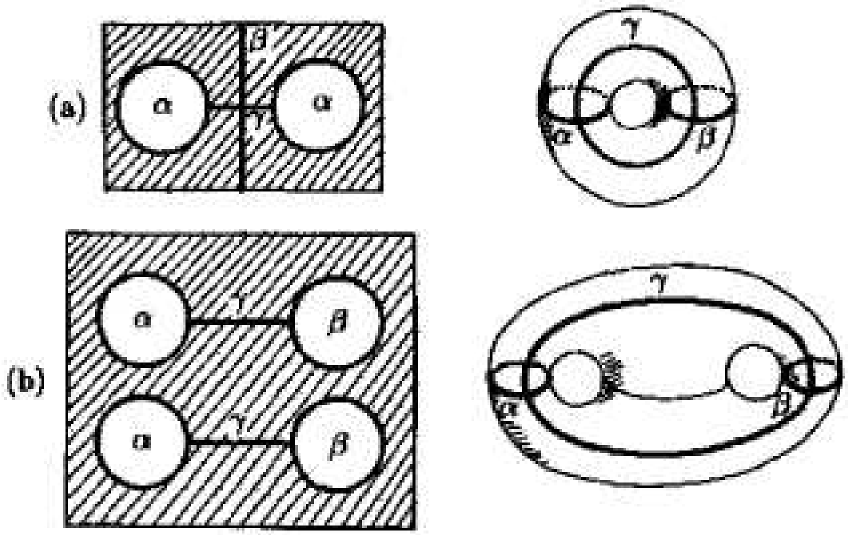

Рис. 5. Случай 2

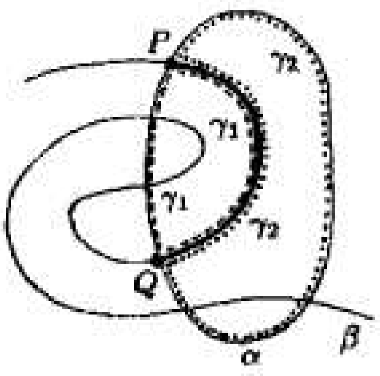

Рис. 6. Случай 3

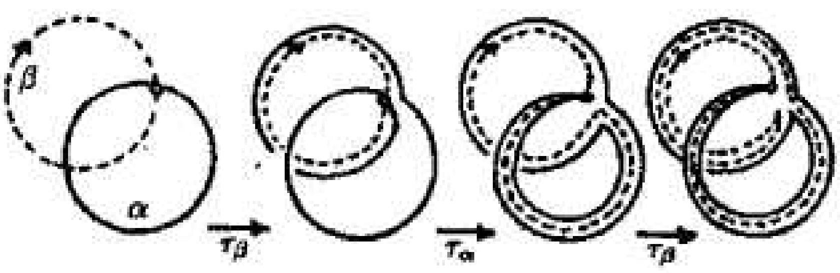

Рис. 7. Обращение ориентации

можно разрезать по g кривым $m_1, \ldots, m_g$ так, что получиться сфера с дырками. Прежде чем так разрезать, сделаем вот что. С помощью леммы переведём $h(m_1)$ в m_1 посредством изотопий и скручиваний Дена. Если кривые $h_(m_1)$ и m_1 противоположно ориентированы, то нужно взять кривую β, пересекающую кривую $\alpha = m_1$ в одной точке и сделать такие скручивания, как на рисунке 7.

Теперь после изотопии можно считать, что кривые $h_(m_1)$ и m_1 поточечно совпадают, т.е. ограничение отображения h на m_1 тождественно. Кривая m_1 разбивает свою ε-окрестность на две части. Гомеоморфизм h сохраняет ориентацию поверхности и ориентацию кривой, поэтому он не переставляет эти части. Поэтому можно разрезать поверхность F по кривым $m_1, \ldots, m_g$ и в результате получим гомеоморфизм диска с дырками, тождественный на крае. Остаётся доказать, что такой гомеоморфизм можно представить в виде композиции скручиваний и изотопий. Это очень тесно связано с косами, и мы докажем это на одной из следующих лекций, когда будем заниматься косами.

Литература

Прасолов В.В., Сосинский А.Б., Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия, 1997. (С. 123–127, 130–139.)

Прасолов В.В., Наглядная топология, 2006. (С. 44–47; здесь написано подробнее про скручивания Дена.)