



Рис. 1. Перестройки

## 5. Разложение на простые узлы. 7 марта 2013

### Поверхность Зейферта

*Поверхность Зейферта* данного узла или зацепления — это связная ориентируемая поверхность, краем которой является данный узел (зацепление). Поверхность Зейферта можно построить, например, следующим образом. Рассмотрим диаграмму узла и на каждом перекрёстке сделаем перестройку, изображённую на рис. 1. В результате получим набор окружностей, ограничивающих некоторые диски. Эти диски можно сделать непесекающимися, слегка приподняв над плоскостью диаграммы. Затем на каждом перекрёстке нужно вклеить перекрученную полосу, чтобы край полученной поверхности совпал с узлом. Если в результате получится несвязная поверхность, то разные компоненты нужно соединить трубочками.

### Род узла или зацепления

*Род* узла или зацепления — это наименьший род его поверхности Зейферта. Род узла  $K$  будем обозначать  $g(K)$ .

**Задача 1.** Докажите, что узел рода 0 тривиален; зацепление рода 0 тоже тривиально.

Для узлов  $K_1$  и  $K_2$  можно определить их сумму  $K_1 + K_2$  (сначала завязан узел  $K_1$ , а после него узел  $K_2$ ). Узел, который нельзя представить в виде суммы двух нетривиальных узлов, называется *простым*.

**Задача 2.** Докажите, что  $K_1 + K_2 = K_2 + K_1$ .

**Теорема 1.**  $g(K_1 + K_2) = g(K_1) + g(K_2)$ .

Неравенство  $g(K_1 + K_2) \leq g(K_1) + g(K_2)$  очевидно: достаточно взять непесекающиеся поверхности Зейферта для узлов  $K_1$  и  $K_2$  и соединить их края ленточкой (для согласования ориентации её можно перекрутить).

Докажем теперь неравенство  $g(K_1 + K_2) \geq g(K_1) + g(K_2)$ . Пусть  $F$  — поверхность Зейферта минимального рода узла  $K_1 + K_2$ . Рассмотрим сферу  $\Sigma$ , пересекающую узел  $K_1 + K_2$  в двух точках и отделяющую узел  $K_1$  от узла  $K_2$ . В ситуации общего положения  $F$  и  $\Sigma$  пересекаются по окружностям и ещё по некоторой дуге  $\beta$ , концы которой принадлежат узлу  $K_1 + K_2$ . В  $\Sigma \setminus \beta$  выберем самую внутреннюю окружность  $C$  и сделаем перестройку по диску, который она ограничивает на  $\Sigma$ . Окружность  $C$  разбивает поверхность  $F$  (иначе после перестройки получилась бы поверхность Зейферта, род которой меньше минимального). Поэтому после перестройки получаем две связные компоненты; выбираем ту из них, которая содержит  $K_1 + K_2$ . Эта компонента имеет тот же род, что и  $F$ , а количество окружностей, по которым она пересекается с  $\Sigma$ , уменьшилось. В конце концов придём к поверхности  $F'$ , род которой по-прежнему равен  $g(K_1 + K_2)$ , а с другой стороны, она составлена из поверхностей Зейферта для узлов  $K_1$  и  $K_2$ , поэтому её род не меньше  $g(K_1) + g(K_2)$ .

Из этой теоремы сразу получаем такие следствия.

- 1) Не существует обратимых узлов, т.е. если узел  $K_1 + K_2$  тривиален, то оба узла  $K_1$  и  $K_2$  тривиальны.
- 2) Любой узел рода 1 простой.
- 3) Любой узел можно представить в виде суммы простых узлов.

**Задача 3.** Докажите, что узел трилистник простой.

### Единственность разложения узла в сумму простых узлов

**Теорема 2.** Пусть  $K = P + Q$  и  $K = K_1 + K_2$ , причём узел  $P$  простой. Тогда либо  $K_1 = P + K'_1$  и  $Q = K'_1 + K_2$ , либо  $K_2 = P + K'_2$  и  $Q = K_1 + K'_2$

Пусть  $\Sigma$  — сфера, которая разделяет узел  $K$  на  $K_1$  и  $K_2$ , а  $B$  — шар, содержащий узел  $P$ . Узел  $K$  и сфера  $\Sigma$  пересекаются в двух точках  $M_1$  и  $M_2$ . Можно считать, что  $\Sigma$  и  $\partial B$  пересекаются трансверсально и окружности, по которым они пересекаются, не проходят через точки  $M_1$  и  $M_2$ . Такая окружность на сфере  $\Sigma$  может либо

разделять эти точек (быть надетой на узел), либо не разделять (быть не надетой). Идея доказательства — постепенно упростить пересечение  $\Sigma \cap \partial B$ . (Если пересечение пусто, то  $B$  содержится в одной из двух компонент, на которые сфера  $\Sigma$  делит пространство.)

СЛУЧАЙ 1. Окружность из  $\Sigma \cap \partial B$  не надета на узел. Выберем среди таких окружностей самую внутреннюю на  $\Sigma$  (точки  $M_1$  и  $M_2$  находятся снаружи). Эта компонента ограничивает диск  $D \subset \Sigma$ , причём  $D \cap \partial B = \partial D$ . На  $\partial B$  кривая  $\partial D$  ограничивает диск  $D'$ , не пересекающий  $K$ . Сфера  $D \cup D'$  ограничивает шар, двигая по которому диск  $D'$ , можно избавиться от одной не надетой окружности, а постепенно и от всех остальных. После этого можно будет считать, что остались только надетые окружности, и перейти ко второму случаю.

СЛУЧАЙ 2. Окружность из  $\Sigma \cap \partial B$  надета на узел. Если компонента  $\Sigma \cap B$  — диск  $D$ , то этот диск пересекает  $K$  в одной точке, и узел  $P$  лежит по одну сторону от диска  $D$ , потому что этот узел простой. Диск  $D$  разделяет шар  $B$  на две части, одна из которых тривиальная, а другая содержит узел  $P$ ; тривиальную часть можно убрать. Таким образом, можно считать, что все компоненты  $\Sigma \cap B$  — цилиндры (кольца). Здесь надо рассмотреть два случая: 1) цилиндр содержит узел  $P$  внутри себя; 2) цилиндр сам завязан в виде узла  $P$ .

Из теоремы 2 следует, что если узел  $P$  простой,  $P + Q = K_1 + K_2$  и  $P = K_1$ , то  $Q = K_2$ . Действительно, согласно этой теореме либо  $P + K'_1 = K_1 = P$  и  $Q = K'_1 + K_2$  для некоторого  $K'_1$ , либо  $P + K'_2 = K_2$  и  $Q = K'_2 + K_1 = K'_2 + P = K_2$  для некоторого  $K'_2$ . В первом случае род узла  $K'_1$  нулевой, поэтому он тривиален и  $Q = K_2$ .

Из этого уже легко выводится единственность разложения узла в сумму простых.

ЛИТЕРАТУРА

Lickorish W.B.R., An Introduction to Knot Theory, Springer, 1997. (С. 15–21.)