

Задачи экзамена по курсу Топология 3 (НМУ, весна 2015).

ЗАДАЧА 1. Вычислите а) гомологии пространства  $\mathbb{R}P^2 * \mathbb{R}P^2$ ;

б) относительные гомологии пары  $(\mathbb{R}P^2 * \mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^1 * \mathbb{R}P^1)$ .

ЗАДАЧА 2. Группа  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  действует на сфере  $S^3 = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$  умножением координат  $z_1, z_2$  на  $\pm 1$ . Найти гомологии факторпространства  $S^3 / \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ .

ЗАДАЧА 3. Существует ли такое негомотопное тождественному непрерывное отображение  $f: S^2 \vee S^2 \rightarrow S^2 \vee S^2$ , что  $f \circ f \circ f$  гомотопно тождественному?

ЗАДАЧА 4. Найти гомологии пространства упорядоченных троек различных точек в  $\mathbb{R}^3$ .

ЗАДАЧА 5. а) Для каких классов  $a_1 \in H^1(T^3, \mathbb{Z}_2)$ ,  $a_2 \in H^2(T^3, \mathbb{Z}_2)$ , найдётся такое двумерное вещественное векторное расслоение  $\xi$  над тором  $T^3$ , что  $w_1(\xi) = a_1$ ,  $w_2(\xi) = a_2$ ?

б) Для каких классов  $a_1 \in H^1(T^3, \mathbb{Z}_2)$ ,  $a_2 \in H^2(T^3, \mathbb{Z}_2)$ ,  $a_3 \in H^3(T^3, \mathbb{Z}_2)$  найдётся такое вещественное векторное расслоение  $\xi$  над тором  $T^3$ , что  $w_1(\xi) = a_1$ ,  $w_2(\xi) = a_2$ ,  $w_3(\xi) = a_3$ ?

ЗАДАЧА 6. Пусть  $E$  — тотальное пространство нетривиального расслоения над  $S^1$  со слоем  $S^n$  и структурной группой  $O(n+1)$ . Какие из классов Штифеля–Уитни его касательного расслоения нетривиальны?