Комплексный анализ — Семинар №2 — 20 февраля 2015

Везде далее $D(a,r) := \{z \in \mathbb{C}\colon |z-a| < r\}$ — круг с центром $a \in \mathbb{C}$ и радиусом $r > 0$, а $\mathbb{D} := D(0,1)$ — единичный круг в $\mathbb{C}$.

1. а) Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций класса Липшица в $\overline{\mathbb{D}}$ с (общей) константой Липшица L. Доказать, что если последовательность $\{f_n\}$ сходится в $\overline{\mathbb{D}}$ поточечно, то она сходится в $\overline{\mathbb{D}}$ равномерно.

б) Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций класса Липшица с константой 1 в $\overline{\mathbb{D}}$, и пусть $\|f_n\|_{\overline{\mathbb{D}}} \leqslant 1$. Показать, что из последовательности $\{f_n\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся в $\overline{\mathbb{D}}$ подпоследовательность.

Заметим, что в задаче **1** можно заменить $\overline{\mathbb{D}}$ на любое ограниченное подмножество $\mathbb{C}$.

2. Доказать, что множество предельных значений функции $f(z) = e^{-i/z}$ в точке $z_0 = 0$ совпадает с $\overline{\mathbb{C}}$.

3. а) Доказать, что функция $f(z) = \sqrt{z^2}$ распадается над всем $\mathbb{C}$ на две непрерывные ветви.

б) Проверить, что в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функция $\operatorname{Ln} z$ не имеет непрерывных ветвей.

в) Описать все непрерывные ветви функции $\sqrt[n]{z}$ в области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, где $\mathbb{R}_-$ — это отрицательная вещественная полуось.

4. Пусть R — рациональная функция комплексного переменного. Доказать, что если $\rho_{ch}(R(z_1), R(z_2)) = \rho_{ch}(z_1, z_2)$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, то R — это дробно-линейная функция ($\rho_{ch}(\cdot,\cdot)$ — хордальное расстояние).

5. а) Доказать, что любое ДЛО W удовлетворяет дифференциальному уравнению $2W'W''' = 3(W'')^2$.

б) Доказать, что любое ДЛО имеет хотя бы одну, но не более двух неподвижных точек.

в) Найти общий вид ДЛО T, имеющего одну неподвижную точку (конечную или бесконечную), выписать общий вид отображения T^n

г) Найти общий вид ДЛО T, имеющего две неподвижных точки (две конечные или одну конечную и одну бесконечную), выписать общий вид отображения T^n.

6. а) Найти общий вид ДЛО круга $D(0,R)$ на себя. Доказать, что величина

$$\frac{|dz|}{R^2 - |z|^2}$$

инвариантна относительно этих ДЛО.

б) Найти общий вид ДЛО верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ на себя. Доказать, что величина

$$\frac{|dz|}{\operatorname{Im} z}$$

инвариантна относительно этих ДЛО.

в) Найти общий вид ДЛО, получающихся из вращений сферы Римана при стереографической проекции. Доказать, что величина

$$\frac{|dz|}{1 + |z|^2}$$

инвариантна относительно этих ДЛО.

7. Найти предельные точки последовательности $\{a_n\}$, если $a_1 = 0$ и

$$a_{n+1} = \frac{a_n + i}{a_n - i}, \quad a_{n+1} = 2\frac{(2-i)a_n - 2i}{a_n + 2 - 4i}, \quad a_{n+1} = \frac{2(2+i)a_n + 1 - 2i}{(1-2i)a_n + 2(2+i)}.$$

8. Доказать, что функция Жуковского однолистна в области G тогда и только тогда, когда области G и $1/G$ не имеют общих точек. Функция e^z однолистна в области G тогда и только тогда, когда области G и $G + 2\pi i$ не имеют общих точек. Функция $\cos z$ однолистна в области G тогда и только тогда, когда области G, $-G$, $G + 2\pi$ и $-G + 2\pi$ не имеют общих точек.

9. Пусть функция f голоморфна и однолистна в $\mathbb{D}$ и пусть $f(0) = 0$. Доказать, что функция $\sqrt[n]{f(z^n)}$ распадается в $\mathbb{D}$ на n голоморфных и однолистных ветвей.

10*. Пусть многочлен $P(z) = a_n z^n + \dots + a_2 z^2 + z$ однолистен в круге $\mathbb{D}$. Доказать, что $n|a_n| \leqslant 1$ и $k|a_k| \leqslant C_{n-1}^{k-1}$ при $k = 2, \dots, n-1$.

11. Доказать, что многочлен $P = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ может быть однолистен в $\mathbb{C}_+$ только тогда, когда его степень не выше 2.

12. Показать, что $\exp(z^2)$ стремится к бесконечности при $z \to \infty$ в любом угле вида $|\arg z - \pi| \leqslant \alpha$ или $|\arg z| \leqslant \alpha$, при $\alpha < \pi/4$. Показать, что эта функция стремится к нулю при $z \to \infty$ в угле вида $|\arg z \pm \pi/2| \leqslant \alpha < \pi/4$.