Комплексный анализ — Семинар №4 — 6 марта 2015

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ — единичный круг, а $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ — единичная окружность.

1. Пусть J — функция Жуковского. При каких $z \in \overline{\mathbb{C}}$ существует и конечен предел $\lim_{n\to\infty} J^{(n)}(z)$, где $J^{(n)} = J \circ \cdots (n \text{ раз}) \cdots \circ J$.

2. Доказать, что целая функция с периодами 1 и i постоянна.

3. Найти круги сходимости рядов $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n^k z^n$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(z-1)^n$ и $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2(2z-i)^n$. Показать, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{inz}$ равномерно сходится в верхней полуплоскости и расходится в нижней.

4. а) Проверить, что справедливы следующие разложения

$$\frac{z(z+a)}{(a-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{a^{n+1}}, |z| < |a|, a \neq 0; \quad \frac{1}{4}\big(e^z + e^{-z} + 2\cos z\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!}.$$

б) разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ и найти радиус сходимости соответствующего ряда (в последнем выражении $\ln z$ обозначает *главное значение* логарифма)

$$\frac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}; \quad \frac{1}{\sqrt{1-z^3}}; \quad \frac{1}{2\sqrt{z}} \ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}.$$

5. Пусть $f \in \mathit{Hol}(\varepsilon\mathbb{D})$, $\varepsilon > 0$, пусть $f(z) = z + f(z^2)$, а $f(0) = 0$. Показать, что $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$.

6. а) Найти на $\mathbb{T}$ все особые точки суммы ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$. б) Доказать, что любая точка $z \in \mathbb{T}$ является особой точкой для суммы ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$.

7. Пусть $f \in \mathit{Hol}(\mathbb{D})$ и $f(0) = 0$. Доказать, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ сходится в $\mathbb{D}$.

8. Пусть $z_0 \neq 0$. Доказать, что условие $\limsup_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - z_0\right|^{1/n} < 1$ необходимо и достаточно для того, чтобы функция $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имела на границе круга сходимости единственную особую точку — полюс первого порядка в точке $z = z_0$.

9. Пусть в круге $|t| < R$ имеет место разложение $F(t,z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) t^n$. Тогда функция F называется производящей функцией для последовательности $\{f_n\}$.

а) Доказать, что функция $\dfrac{1}{1-t-t^2}$ является производящей функцией для последовательности чисел Фибоначчи ϕ_n и, используя соответствующее представление, показать, что

$$\phi_n = \Big[\big(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\big)^{n+1} - \big(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\big)^{n+1}\Big]/\sqrt{5}.$$

б) Доказать, что функция $\dfrac{4-t^2}{4-4tz+t^2}$ является производящей функцией для многочленов Чебышева $T_n(z) = 2^{1-n}\cos(n \arccos z)$ и вывести, что при $n \geqslant 2$ справедливо рекуррентное соотношение $4T_{n+1}(z) - 4zT_n(z) + T_{n-1}(z) = 0$.

10. Существует ли голоморфная в круге $\mathbb{D}$ функция f такая, что а) $f(\pm 1/n) = 1/n^2$; б) $f(\pm 1/n) = 1/n^3$; в) $f(1/n) = 1/\sqrt{n}$; г) $f(1/n) = 1/2^n$.

11. Пусть $f \in \mathit{Hol}(\mathbb{C})$ и пусть для любого $z_0 \in \mathbb{C}$ ряд $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ имеет хотя бы один нулевой коэффициент a_n. Доказать, что f — это многочлен.