Комплексный анализ — Семинар №6 — 20 марта 2015

1. Пусть K — компакт в $\mathbb{C}$ такой, что множество $\mathbb{C}\setminus K$ не связно, а $0 \in \widehat{K}\setminus K$. Доказать, что функция $1/z$ не может быть равномерно на K приближена комплексными многочленами.

2. Пусть K — такой компакт в $\mathbb{C}$, что множество $\mathbb{C}\setminus K$ связно и пусть функция f голоморфна в некоторой окрестности K. Доказать, что найдется последовательность комплексных многочленов $\{P_n\}$ такая, что для всех $k\in\mathbb{N}_0$ выполнено $P_n^{(k)} \to f^{(k)}$ равномерно на K при $n\to\infty$.

3. а) Привести пример компакта K такого, что $K^\circ = \varnothing$ и $C(K) \neq R(K)$. б) Привести пример компакта K такого, что $K^\circ \neq \varnothing$, K° — это связное, односвязное и плотное в K множество, и $Hol(K^\circ)\cap C(K) \neq R(K)$.

4. Доказать теорему Гартогса–Розенталя: если K — компакт в $\mathbb{C}$, а $\Lambda(K)=0$, то $C(K)=R(K)$.

5. Пусть $g\in C^1(\mathbb{C})$, причем $\mathrm{Supp}(\overline{\partial} g)$ — компакт и пусть

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{\overline{\partial} g(\zeta) d\Lambda(\zeta)}{z-\zeta}.$$

Доказать, что $g-F\in Hol(\mathbb{C})$, и что $g\equiv F$ тогда и только тогда, когда $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$.

6. Пусть функция f голоморфна в замкнутом круге $\{|z|\leqslant R\}$, $R>0$, за исключением полюсов $a_1,\dots,a_n$ (рассматриваемых с учетом их кратности), $|a_*|<R$, пусть $b_1,\dots,b_m$ — нули функции f в $\{|z|\leqslant R\}$ (также рассматриваемые с учетом кратности), $|b_*|<R$, и пусть $f(0)\neq 0$. Доказать формулу Иенсена:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\vartheta})|d\vartheta = \ln|f(0)| - \sum_{k=1}^{n}\ln\frac{R}{|a_k|} + \sum_{j=1}^{m}\ln\frac{R}{|b_j|}.$$

7. Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$ и пусть $f\in Hol(G\setminus A)\cap C(\overline{G}\setminus A)$, где A — множество полюсов функции f в G. Доказать, что для любого $a\in\mathbb{C}$, $|a|>\|f\|_{\partial G}$, верно равенство $N_{(f-a)}(G) = P_f(G)$.

8. а) Найти число нулей многочлена $2z^4-5z+2$ в круге $|z|<1$ и число нулей многочлена z^4+z^3-4z+1 в кольце $1<|z|<2$. б) Найти число нулей функции $z^2-\cos z$ в круге $\{|z|<2\}$.

9. Найти число корней уравнения z^3+2z^2+3z+8: а) в левой полуплоскости; б) в верхней полуплоскости; в) в полукруге $\{|z|<4,\ \mathrm{Im}\, z>0\}$.

10. а) Доказать, что для любого $a\in\mathbb{C}$ и для любого целого $n\geqslant 2$ многочлен az^n+z+1 имеет корень в круге $\{|z|\leqslant 2\}$. б) Доказать, что для любого $\lambda>1$ уравнение $ze^{(\lambda-z)}=1$ имеет в круге $\{|z|\leqslant 1\}$ ровно один корень (причем вещественный).

11. Доказать, что уравнения а) $z\sin z = 1$ и б) $\mathrm{tg}\, z = z$ имеют только вещественные корни.

12*. Доказать, что уравнение $\sin z = z$ имеет бесконечно много решений в $\mathbb{C}$.

13*. Пусть $a_n>\dots>a_1>a_0\geqslant 0$. Доказать, что функция $a_0+a_1\cos z+\dots+a_n\cos(nz)$ имеет только вещественные нули.