Комплексный анализ — Семинар №7 — 27 марта 2015

1. Доказать, что функция az^2+bz+c однолистна в выпуклой области в том и только том случае, когда она локально однолистна в этой области.

2. Пусть $f \in Hol(\overline{G})$, где G — некоторая область, пусть f непостоянна в G, и пусть модуль f имеет одно и то же значение на ∂G. Доказать, что однолистность f в G эквивалентна ее локальной однолистности в G.

3. Пусть $-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < +\infty$. Доказать, что любая голоморфная ветвь функции $\sqrt[n]{(z-a_1)\cdots(z-a_n)}$ в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ однолистна в $\mathbb{C}_+$.

4. Пусть G — жорданова область в $\mathbb{C}$, а f — некоторое конформное отображение $\mathbb{D}$ на G. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется однолистный в круге $\mathbb{D}$ многочлен P такой, что $\|f-P\|_{\overline{\mathbb{D}}} < \varepsilon$.

5. Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ такова, что $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| < 1$. Доказать, что функция $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ конформно отображает круг $\mathbb{D}$ на некоторую жорданову область.

6. Пусть функция f конформно отображает круг $\mathbb{D}$ на некоторую ограниченную область. Доказать, что $(1-|z|)|f'(z)| \to 0$ при $|z| \to 1$.

7. Пусть функция f однолистна в круге $\mathbb{D}$, пусть $f(0)=0$, и пусть f не принимает значение $c \in \mathbb{C}$. Доказать, что при $z \in \mathbb{D}$ выполнено

$$|f(z)| \leqslant \frac{4|cz|}{(1-|z|)^2}.$$

8. Пусть G — область в $\mathbb{C}$, а функция f мероморфна в области G. а) Доказать, что если при отображении $z \mapsto f(z)$ образом любого отрезка, лежащего в области G, является отрезок, то f — линейная функция. б) Доказать, что если при отображении $z \mapsto f(z)$ образом любого отрезка, лежащего в области G, является отрезок или дуга окружности, то f — ДЛО.

9. Найти какую-либо максимальную область конформности для функции а) $\sinh z^2$, б) $Ж(\operatorname{tg} z)$, где $Ж(z)$ — функция Жуковского, в) $Ж((Ж(z))^2)$. Указать образы найденных областей и соответствие границ.

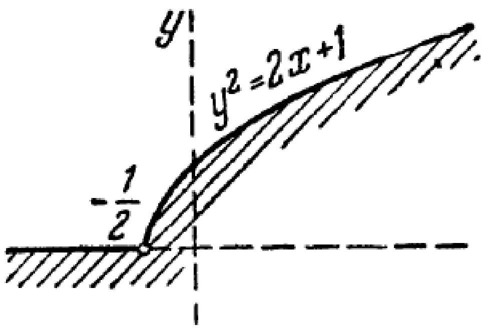
10. Найти образы областей G при отображении указанными функциями: а) $G = \{\operatorname{Re} z > 0,\ -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$, $w = \cosh \pi z$; б) $G = \{\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \ln(z+\sqrt{z^2+1})$, $w(2) > 0$; в) $G = \{(\operatorname{Im} z)^2 - (\operatorname{Re} z)^2 < \frac{1}{2}\}$, $w = \ln(z+\sqrt{z^2+1})$, $w(0) = 2\pi i$.

11. Найти какие-либо конформные отображения областей, изображенных на рисунках (см. на обороте) на единичный круг.

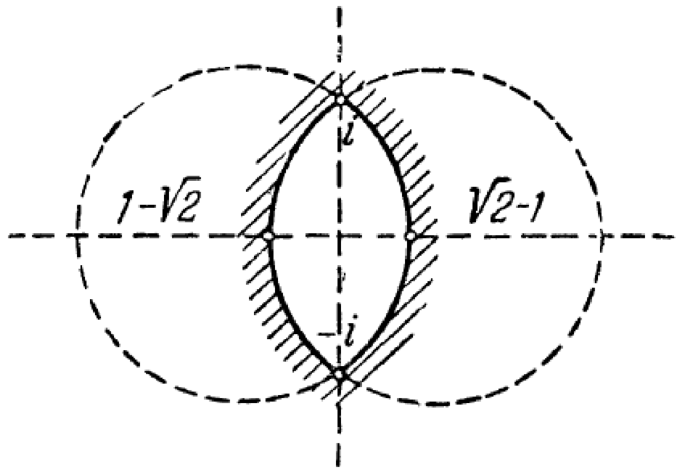
12. а) Конформно отобразить круг $\{|z-2i| < 2\}$ с разрезами $[0, 2ti)$ и $[(4-s)i, 4i)$, $t, s \in [0,1]$, на этот же круг без разрезов со следующим соответствием границ: $2ti \mapsto 0$, $(4-s)i \mapsto 4i$, $2+2i \mapsto 2+2i$. б) Конформно отобразить область $\{\operatorname{Im} z > 0,\ |z| > 2\}$ с разрезом $(2i, (2+t)i]$, $t \in [0,1]$, на эту же область со следующим соответствием границ: $(2+t)i \mapsto 2i$, $0 \mapsto 0$, $2 \mapsto 2$. Проследить динамику устранения разрезов при $t \to 0$ и $s \to 0$.

13*. Пусть функция $g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots$ голоморфна в $\{1 < |z| < \infty\}$ и непрерывна в $\{1 \leqslant |z| < \infty\}$. Пусть $\varGamma$ — жорданова кривая в $\mathbb{C}$. Доказать, что если $g(\mathbb{T}) \subset \varGamma$ и g не принимает хотя бы одно значение из $\mathbb{C} \setminus \varGamma$, то g отображает область $\{1 < |z| < \infty\}$ конформно на область $D_\infty(\varGamma)$ (неограниченную компоненту множества $\mathbb{C} \setminus \varGamma$).

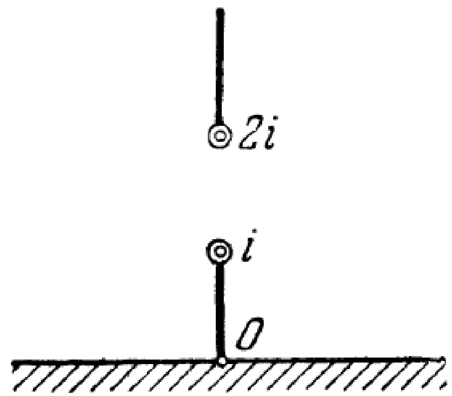
14*. Доказать теорему Литтлвуда: для любой функции $f = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ класса $\mathcal{S}$ справедливы оценки $|a_n| < en$, $n = 2, 3 \ldots$.



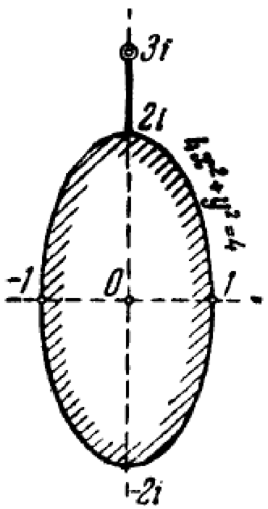
y
$y^2=2x+1$
$-\frac{1}{2}$



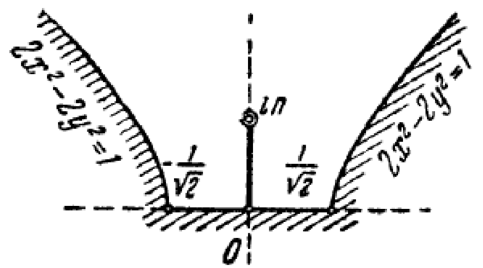
$1-\sqrt{2}$
$\sqrt{2}-1$
i
$-i$



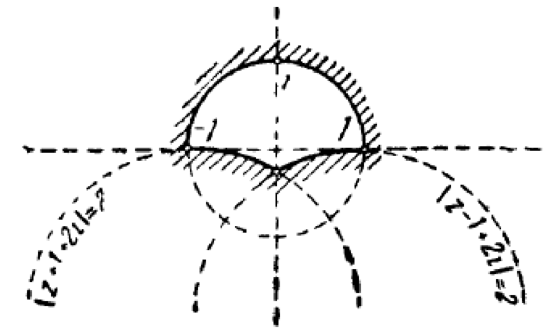
$2i$
i
0



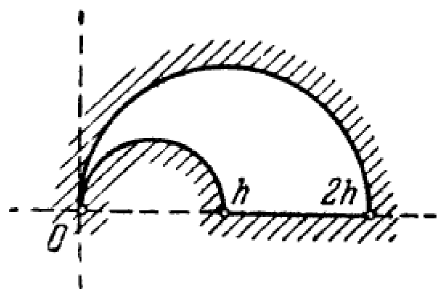
$3i$
$2i$
$4x^2+y^2=4$
-1
0
1
$-2i$



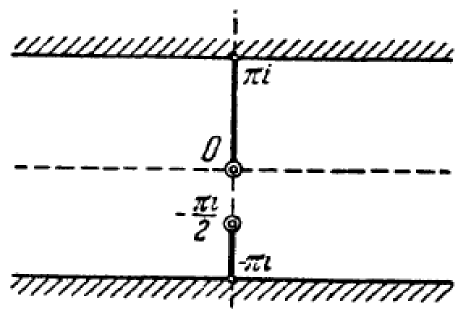
$2x^2-2y^2=1$
in
$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$2x^2-2y^2=1$
0



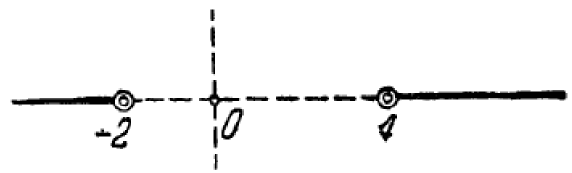
1
-1
1
$|z+1+2i|=2$
$|z-1+2i|=2$



0
h
$2h$



πi
0
$-\frac{\pi i}{2}$
$-\pi i$



-2
0
4