Комплексный анализ — Семинар №8 — 3 апреля 2015

1. Пусть G — односвязная область такая, что $0 \in G$ и ∂G содержит более одной точки. Пусть $\mathcal{H}(G) := \{h \in \mathit{Hol}(G)\colon h(0) = 0,\ h'(0) = 1\}$. Доказать, что минимум величины $\sup_{z\in G} |h(z)|$ при $h \in \mathcal{H}(G)$ достигается на единственной функции f, а именно на конформном отображении G на круг $\{|z| < R\}$, где R — конформный радиус области G в точке 0.

2. В условиях предыдущей задачи минимум величины

$$\iint_G |h'(z)|^2 d\Lambda(z)$$

достигается на функции f (из предыдущей задачи) и только на ней.

3. а) Найти все кольца вида $\{\rho_1 < |z| < \rho_2\}$, конформно эквивалентные данному кольцу $\{r < |z| < R\}$, где $0 \leqslant r < R < \infty$. б) Найти группу конформных автоморфизмов кольца $\{\frac{1}{2} < |z| < 2\}$.

4. Доказать, что любой конформный изоморфизм одного прямоугольника на другой прямоугольник, переводящий все четыре вершины в вершины, линеен.

5. Пусть $f \in \mathit{Hol}(\{0 < \operatorname{Re} z < 1\}) \cap C(\{0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1\})$ и пусть f принимает вещественные значения на прямых $\operatorname{Re} z = 0$ и $\operatorname{Re} z = 1$. Доказать, что f можно продолжить до функции $F \in \mathit{Hol}(\mathbb{C})$, удовлетворяющей соотношению $F(z) = F(z + 2)$.

6. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{T}$ — дуга единичной окружности. Доказать, что если $f \in \mathit{Hol}(\mathbb{D}) \cap C(\mathbb{D} \cup \Gamma)$ и $f|_\Gamma = 0$, то $f \equiv 0$.

7. Пусть $f \in \mathit{Hol}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ такова, что $\operatorname{Re} f = 0$ на $\mathbb{T}$. Пользуясь симметрии и теоремой Лиувилля показать, что f постоянна. Показать, что $\mathbb{T}$ нельзя заменить на непустую открытую дугу $\Gamma \subset \mathbb{T}$. Останется ли первое утверждение верным, если круг $\mathbb{D}$ заменить на произвольную ограниченную односвязную область?

8. Пусть функция f конформно отображает полуплоскость $\mathbb{C}_+$ на полосу, из которой удалены несколько лучей, параллельных сторонам полосы. Доказать, что f' — рациональная функция. Проверить это утверждение явно в случаях, когда из полосы удалены один или два луча, лежащие на средней линии рассматриваемой полосы.

9. Пусть $0 < k < 1$. Проверить, что функция

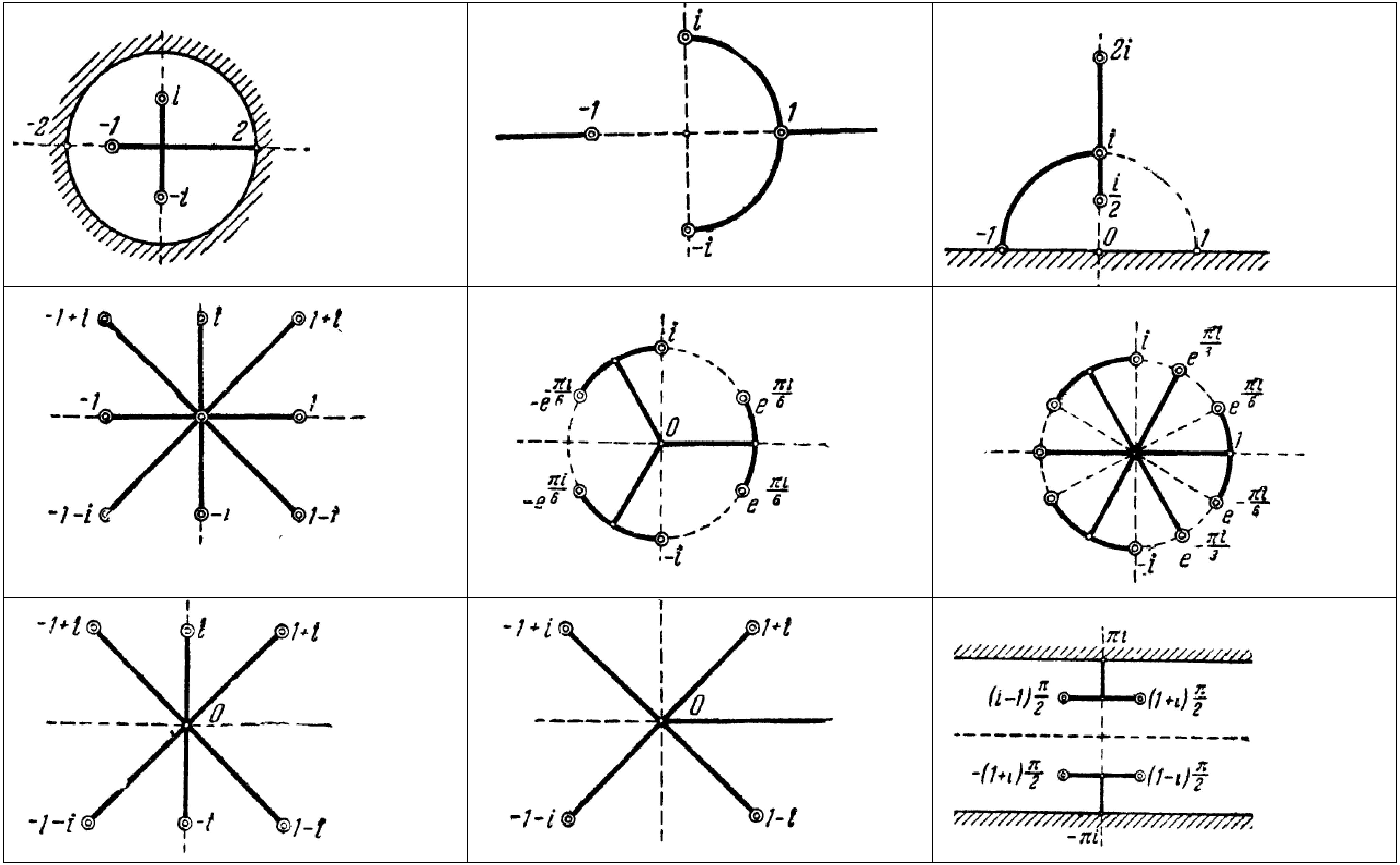
$$F(z) = \int_0^z \sqrt{\frac{1 - k^2 w^2}{1 - w^2}}\, dw$$

корректно определена, голоморфна и однолистна в $\mathbb{C}_+$. Найти образ полуплоскости $\mathbb{C}_+$ при отображении, осуществляемом функцией F.

10. Пусть функция $g(z; z_1, z_2, z_3)$ конформно отображает полукруг $\{|z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ на тот же самый полукруг с соответствием границ $g(z_1) = 1$, $g(z_2) = i$, $g(z_3) = -1$ (точки z_1, z_2, z_3 таковы, что $|z_j| = 1$, $\operatorname{Im} z_j = 0$ при $j = 1, 2, 3$). При каких условиях на точки z_1, z_2, z_3 это конформное отображение продолжается до конформного отображения а) круга $\mathbb{D}$ на круг $\mathbb{D}$ с разрезами по отрезкам $[-1, -\frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2}, 1]$, и б) круга $\mathbb{D}$ на полуплоскость $\mathbb{C}_+$ с разрезом по дуге $e^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [0, \pi/2]$?

11. Найти какие-либо конформные отображения областей, изображенных на рисунках (см. на обороте) на единичный круг.

12*. Для некоторых многочленов $P(u, v)$ от двух переменных с вещественными коэффициентами справедливо следующее утверждение: если функция $f \in \mathit{Hol}(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ удовлетворяет условию $P(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f) \equiv 0$ на $\mathbb{T}$, то она постоянна. Например, многочлены $P(u, v) = u$ и $P(u, v) = v$ таковы. Однако для некоторых многочленов приведенное свойство неверно: если $P(u, v) = u^2 + v^2 - 1$, то функция $f(z) = z$ доставляет соответствующий контрпример. Найти необходимое и достаточное условие на P, при котором указанное выше свойство выполняется. При каких значениях параметра $c \in \mathbb{R}$ многочлен $P(u, v) = v^2 - u^3 + cu$ удовлетворяет этому условию.



-2
-1
2
i
-i
-1
1
i
-i
2i
i
i/2
-1
0
1
-1+i
i
1+i
-1
1
-1-i
-i
1-i
i
0
$-e^{-\frac{\pi i}{6}}$
$e^{\frac{\pi i}{6}}$
$-e^{\frac{\pi i}{6}}$
$e^{-\frac{\pi i}{6}}$
-i
i
$e^{\frac{\pi i}{3}}$
$e^{\frac{\pi i}{6}}$
1
$e^{-\frac{\pi i}{6}}$
$e^{-\frac{\pi i}{3}}$
-i
-1+i
i
1+i
0
-1-i
-i
1-i
-1+i
1+i
0
-1-i
1-i
πi
$(i-1)\frac{\pi}{2}$
$(1+i)\frac{\pi}{2}$
$-(1+i)\frac{\pi}{2}$
$(1-i)\frac{\pi}{2}$
$-\pi i$