Комплексный анализ — Семинар №9 — 17 апреля 2015

1. Пусть $\gamma_1 := \{z\colon |z-i| = 1\}^+$ и $\gamma_2 := \{z\colon |z+i| = 1\}^+$ и пусть F_0 — это элемент $(f_0, \mathbb{D})$, где $f_0(z) = \ln(z+\sqrt{1+z^2})$, $f(0) = 0$. Найти результат аналитического продолжения элемента F_0 по кривым γ_1 и γ_2, и по их суммам $2\gamma_1$, $2\gamma_2$, $\gamma_1+\gamma_2$, $\gamma_2+\gamma_1$.

2. Пусть $\gamma_k := \{z\colon |z-i^k| = 1\}^+$ при $k = 1,2,3,4$ и пусть F_0 — это элемент $(f_0, \mathbb{D})$, где

$$f_0(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}, \quad f_0'(0) = 1.$$

Найти результат аналитического продолжения элемента F_0 по кривым $\gamma_1+\gamma_3$, $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$, $2(\gamma_1+\gamma_3)+2(\gamma_2+\gamma_4)$.

3. Пусть $g_1, \dots, g_m \in Hol(\mathbb{C})$, а $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$. Пусть D — некоторый круг, не содержащий точек $a_1, \dots, a_m$, и пусть f_0 — голоморфная в круге D ветвь функции $g_1(z)\operatorname{Ln}(z-a_1)+\dots+g_m(z)\operatorname{Ln}(z-a_m)$. Пусть λ — замкнутая ломаная, с началом и концом в центре круга D, не содержащая точек $a_1, \dots, a_m$ и ∞. Найти элемент (f_λ, D), получающийся из элемента (f_0, D) в результате аналитического продолжения по кривой λ.

4. Провести исследование указанных ниже полных аналитических функций по Вейерштрассу (найти начальный элемент; определить, вдоль каких путей он продолжаем и выписать семейство канонических элементов, осуществляющих продолжение вдоль каждого такого пути; определить, сколько элементов с центром в данной точке и как они друг от друга отличаются; найти и описать изолированные особые точки): $\sqrt[3]{1-z^2}$, $\operatorname{Ln}(1+z^2)$, $\sqrt{1+\sqrt{z}}$. Для функций, являющихся алгебраическими выписать соответствующие неприводимые алгебраические уравнения.

5. Найти максимальные области, в которой аналитические функции $\sqrt[3]{(z^2-1)(z^2-4)}$, $\sqrt[n]{1-z^n}$, $\sqrt[3]{z}+\operatorname{Ln}\dfrac{1+z^2}{1-z^2}$ допускают выделение голоморфных ветвей.

6. а) Пусть $\Omega := \mathbb{C}\setminus[-1,1]$, а $f(z) = z^2-1$. Проверить, что существует $g \in Hol(\Omega)$ такая, что $f = g^2$, но не существует такой $h \in Hol(\Omega)$, что $f = \exp(h)$.

б) Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и пусть $f \in Hol(G)$ и $f \not\equiv 0$. Доказать, что $f = g^2$ для некоторой функции $g \in Hol(G)$ в том и только том случае, когда все нули функции f в G имеют четный порядок.

в) Найти такие числа $b \in \mathbb{C}$, что всякая функция $f \in Hol(\mathbb{D})$ такая, что $f \neq \pm b$ в $\mathbb{D}$, имеет вид g^3-g для некоторой функции $g \in Hol(\mathbb{D})$.

г) Пусть $f, g \in Hol(\mathbb{C})$ таковы, что $f^2+g^2 \equiv 1$ в $\mathbb{C}$. Доказать, что существует $h \in Hol(\mathbb{C})$ такая, что $f(z) = \cos(h(z))$ и $g(z) = \sin(h(z))$.

7. Проинтегрировав подходящую ветвь функции $\operatorname{Ln}(1+iz)\big/(z(z^2+a^2))$ по границе области $\{z\colon \operatorname{Im} z < 0,\ |z| < R\}$, вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x(x^2+a^2)}dx$ при всех $a > 0$.

8. Проинтегрировав подходящую ветвь функции $(\operatorname{Ln} z)^2\big/(1+z+z^2)$ по границе области $\{z\colon \rho < |z| < R,\ \arg z \in (0, 2\pi)\}$, вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+x+1}dx$.

9*. а) Пусть $P(z,w) \in \mathbb{C}[z,w]$ — неприводимый многочлен, пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ — некоторое конечное подмножество $\mathbb{C}$, и пусть $\mathscr{F}$ — такая аналитическая функция в $\mathbb{C}\setminus A$, что $P(z,w) = 0$ в том и только том случае, когда $w = \mathscr{F}(z)$. Доказать, что род g алгебраической кривой $\{P(z,w) = 0\}$ равен

$$g = \frac{1}{2}\sum_j (k_j-1) - m + 1,$$

где m — число листов аналитической функции $\mathscr{F}$, а k_j — это порядок ее ветвления в j-ой особой точке. Сумма берется во всем особым точкам функции $\mathscr{F}$ (включая точку ∞).

б) Разобрать примеры: $\sqrt{z^n-1}$, $1\Big/\big((1+\sqrt{z})(1+\sqrt[4]{z})\big)$, $\sqrt{1-\sqrt{z}}$, и $\sqrt[n]{z^2+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.